1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5\cdot 2^{n+1}} - 2}{n^2\left(1-\exp\frac{1}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\sqrt[n]{10}-1\right)}{n^2\cdot \frac{1-\exp\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}\cdot\frac{1}{n^3}} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$= -2\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\frac{1}{n^3}-1}{\frac{1}{n^3}}\right)^{-1}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{n}\ln 10\right)-1}{\frac{1}{n}\cdot\ln 10}\cdot\ln 10$$

$$= -2\cdot 1^{-1}\cdot \ln 10\cdot 1 = -2\ln 10 = \ln\frac{1}{100}$$

Použili jsme Heineho větu a známou lim.:

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\exp y - 1}{y} = 1$: Vnější fce $f(y) = \frac{\exp y - 1}{y}$

posloupnost $x_n = \frac{1}{n^3}$, resp $y_n = \frac{1}{n}\cdot\ln 10$.

V obou případech (tj. pro $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$) platí podmínky z H.V. (H1), (H2), tj.

(H1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(H2) $\forall n\in\mathbb{N}: x_n \neq 0,\ y_n\neq 0$.

Jiná možnost řešení: pomocí H.V. převést ilmed na lim fce a pak užívat VOLSF.

---

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot$$

$$\cdot\frac{x\cdot\left((2x^2+1)^{\frac{2}{3}} + (2x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}\right)}{2x^2+1-(x+1)} \overset{\text{VOAL + VOLSF}}{=}$$

$$= 1\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left((\ ) + (\ )(\ ) + (\ )\right)}{x\cdot(2x-1)}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF(S)}}{=}} \frac{(2\cdot 0^2+1)^{\frac{2}{3}} + (2\cdot 0^2+1)^{\frac{1}{3}}(0+1)^{\frac{1}{3}} + (0+1)^{\frac{2}{3}}}{2\cdot 0 - 1} =$$

$$= \frac{1+1\cdot 1+1}{-1} = -3$$

VOLSF: $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$ vnější fce

$g(x) = \sin x \qquad \lim\limits_{x\to 0} g(x) \overset{\text{spoj. sin}}{=} \sin 0 = 0$

(P): $\forall x\in P(0,\frac{\pi}{2}): \sin x\neq 0$
(sin je na $P(0,\frac{\pi}{2})$ prostá).

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to 0} f(y) \overset{\text{známá lim.}}{=} 1$

---

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2}\left(\ln(n^2+1)-\ln n^2\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Protože $n^3+(-1)^n \geq 0$, $n\in\mathbb{N}$, jde o řadu s nezápornými členy.
(A tedy K $\Leftrightarrow$ AK.)

Srovnáme s řadou $b_n := n\cdot\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{(1+n^2)\cdot n}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}}_{1 \text{ podle H.V.}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}\cdot 1$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1+\lim\frac{(-1)^n}{n^3}}{\lim\frac{1}{n^2}+1} = \frac{1+0}{0+1} = 1\in(0,\infty).$$

„nulová · omezená“

Heineho věta: fce $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$;

známá lim.: $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$

posloupnost $x_n := \frac{1}{n^2}$:

(H1): $x_n\to 0$ ✓ (H2) $\forall n: x_n\neq 0$ ✓

LSK (i): $\sum a_n$ K. $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K.

Ovšem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ D. (Harmonická

Tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ D.

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$

• $D_f$: jmenovatel $= x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$

1 je kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Tedy $D_f = \mathbb{R}$.

• 1 $f$ je spojitá na $\mathbb{R}$, jako podíl dvou spojitých fcí (polynomů).

• symetrie nejsou

• 2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{\pm\infty}+\frac{2}{(\pm\infty)^2}}$

$= 1$

• Asymptota v $\pm\infty$ je $A(x) \equiv 1$.

• 1 $f(0) = 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tedy jediný průsečík s osami je bod $[0,0]$.

• 2 $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{(x+1)^2+1}\right)' = \dfrac{2x\left((x+1)^2+1\right) - x^2\cdot 2(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$

$= \dfrac{2x\left(x^2+2x+2-x^2-x\right)}{(\ \dots\ )^2} = \dfrac{2x(x+2)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$

• monotonie: jmenovatel je vždy kladný $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ znaménko derivace závisí pouze na čitateli:

nulové body: $x=-2$, $x=0$

2

| $x \in$ : | $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\oplus$ | $\ominus$ | $\oplus$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

• $f(-2) = \dfrac{4}{4-4+2} = \dfrac{4}{2} = 2$

maximum lokální i globální.

• $f(0) = 0$

1 minimum lokální i globální.

[POZN: Že jde o lokální extrémy, je patrné přímo z tabulky. Později (např. po nakreslení grafu) začne být jasné, že jsou to navíc ext. globální]

• 1 $H_f = [0,2]$

• 2 $f''(x) = \left(\dfrac{2x(x+2)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}\right)' =$

$= \left(\dfrac{2x^2+4x+4-4}{(x^2+2x+2)^2}\right)' =$

$= \left(\dfrac{2}{x^2+2x+2} - \dfrac{4}{(x^2+2x+2)^2}\right)' =$

$= \dfrac{-2\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + \dfrac{4\cdot 2(x^2+2x+2)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4}$

$= (2x+2)\cdot\left(\dfrac{-2}{(x^2+2x+2)^2} + \dfrac{8}{(x^2+2x+2)^3}\right) =$

$= (2x+2)\cdot\dfrac{-2x^2-4x-4+8}{(x^2+2x+2)^3} =$

$= -4(x+1)\cdot\dfrac{x^2+2x-2}{(x^2+2x+2)^3} =$

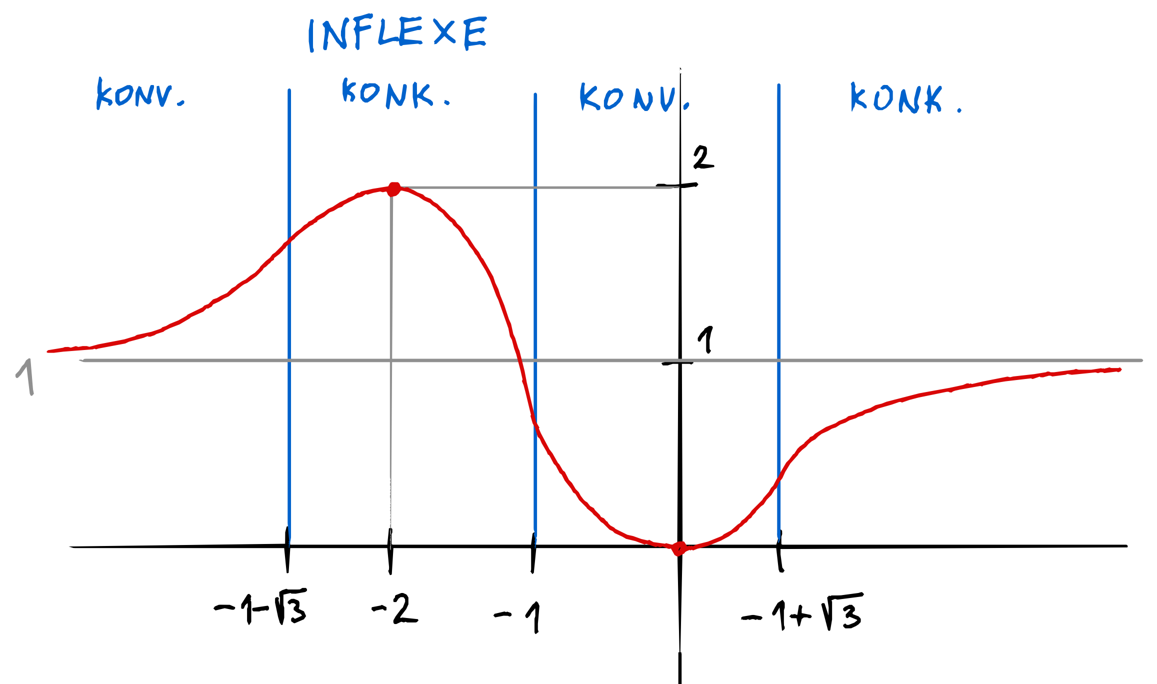
$= \underbrace{\dfrac{-4}{(x^2+2x+2)^3}}_{<0}(x+1)\cdot(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

[$x^2+2x-2=0 \dots x_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$]

nulové body $f''$: $x \in \{-1-\sqrt{3}, -1, -1+\sqrt{3}\}$

2

| $x \in$ : | $(-\infty,-1-\sqrt{3})$ | $(-1-\sqrt{3},-1)$ | $(-1,-1+\sqrt{3})$ | $(-1+\sqrt{3},\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\oplus$ | $\ominus$ | $\oplus$ | $\ominus$ |
| $f$ | $\smile$ | $\frown$ | $\smile$ | $\frown$ |




5b. za graf