Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 12. ledna 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5\cdot 2^{n+1}}-2}{n^2\cdot\left(1-\exp\frac{1}{n^3}\right)}.$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+1}}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2}\cdot\big(\ln(n^2+1)-\ln n^2\big).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+2}$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 12. ledna 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte pojem vybrané posloupnosti (tj. podposloupnosti). [**2** body]

(b) Napište definici derivace funkce v bodě. [**2** body]

(c) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(d) Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. [**2** body]

(e) Zformulujte Bolzanovu větu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že vlastní limita posloupnosti je jednoznačně určená, pokud existuje. [**5** bodů]

(b) Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak je funkce f v bodě a spojitá. [**4** body]

(c) Dokažte vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. [**5** bodů]

(d) Dokažte, že každá absolutně konvergentní řada je konvergentní. [**5** bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(a) Konstantní funkce má v každém bodě globální maximum. [**1** bod]

(b) Každá neomezená konvergentní posloupnost má alespoň dvě různé limity. [**1** bod]

(c) Pokud $A \subseteq \mathbb{R}$ a platí $M = \max A$, pak také $M = \sup A$ [**1** bod]

(d) Pokud $B \subseteq \mathbb{R}$ a platí $i = \inf B$, pak také $i = \min B$. [**1** bod]

(e) Mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nějaké číslo racionální. [**1** bod]

(f) Pokud má funkce f v bodě a lokální extrém, pak existuje $f'(a)$. [**1** bod]

(g) Každá omezená funkce nabývá svého globálního minima i maxima. [**1** bod]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Weierstrassovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte Heineho větu. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.