Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 6. února 2025

Početní část

Příklad 1. Spočtěte následující limitu posloupnosti (své kroky stručně zdůvodněte): [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[4]{n^3+2n+1}}{\sqrt[4]{2n^4+n^3} - \sqrt{n^2+3n}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{n^2}}$$

Příklad 2. Spočtěte následující limitu funkce (své kroky stručně zdůvodněte). [**10** bodů]
Při výpočtu se bude hodit vzorec $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-2) - \ln x}{(1-\cos^2(2x))(\operatorname{cotg}(x+2) - \operatorname{cotg}(x^2))}$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci řady v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$: [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\ln\left(n^2+n^p\right) - \ln\left(n^2\right) \Big)$$

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 6. února 2025

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity funkce ve vlastním bodě. [**2** body]

(b) Definujte spojitost funkce v bodě a spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(c) Napište přesnou definici konvexní funkce na intervalu. [**2** body]

(d) Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti. [**5** bodů]

(b) Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak je funkce f v bodě a spojitá. [**4** body]

(c) Zformulujte a dokažte Rolleovu větu. Pomocná tvrzení zformulujte bez důkazu. [**6** bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(a) Konstantní funkce má v každém bodě globální maximum. [**1** bod]

(b) Pokud $A \subseteq \mathbb{R}$ a platí $M = \max A$, pak také $M = \sup A$ [**1** bod]

(c) Každá spojitá funkce na intervalu I má v každém bodě I derivaci. [**1** bod]

(d) Mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nějaké číslo racionální. [**1** bod]

(e) Pokud má funkce f v bodě a lokální extrém, pak existuje $f'(a)$. [**1** bod]

(f) Každá omezená funkce nabývá svého globálního minima i maxima. [**1** bod]

(g) Každá neomezená konvergentní posloupnost má alespoň dvě různé limity. [**1** bod]

(h) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje nutnou podmínku konvergence. Znamená to, že nutně konverguje? [**1** bod]

(i) Může mít (ryze) rostoucí funkce v nějakém bodě nulovou derivaci? [**1** bod]

(j) Nechť $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Existuje $f'(0)$? [**1** bod]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.

Celkem teoretická část: [**35** bodů]