Řady

Poučka (Významné příklady)**.** Známé příklady konvergentních řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonická řada - divergentní)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Teleskopická řada)

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $q \in (-1, 1)$ (Součet geometrické řady)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basilejský problém)

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Alternativní definice Eulerova čísla)

Věta („Hraniční výsledky“)**.** Hranice mezi divergentními a konvergentními příklady.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje pro $\varepsilon > 0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n}$ konverguje pro $\varepsilon > 0$

Věta (Nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poučka. Není-li tato podmínka splněna, tak řada nutně musí divergovat.

$\boxed{1}$ Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+4}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n}{2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n}}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

[1] (a) D; (b) D; (c) K; (d) D; (e) K; (f) K; (g) D; (h) K; (i) D; (j) D; (k) D; (l) K;

Věta ((Základní vlastnosti součtu řady)**.** Mají-li pravé strany smysl, pak platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Linearita)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ (Konvergence nezávisí na konečném počtu členů)

Věta (Srovnávací kriterium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, které splňují $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n$, pak platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

2 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^4-4}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}+10}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{2^{-n}+n^2+\log n}$

[2] (a) D; (b) K; (c) D; (d) K; (e) K; (f) K; (g) K; (h) K; (i) K; (j) D;

Věta (Limitní srovnávací kriterium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$$

(a) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(c) Pro $A = 0$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(d) Pro $A = \infty$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

---

3 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+n^4}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1+n^2}{1+n^3}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1) \operatorname{arctg} 2n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$*$(k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})$

$*$(l) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \log\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

[3] (a) K; (b) D; (c) K; (d) K; (e) D; (f) K; (g) K; (h) D; (i) K; (j) K; (k) K$\Leftrightarrow$ $\alpha < \frac{3}{2}$; (l) K$\Leftrightarrow$ $\beta < 3$;

Věta (Cauchyho odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pokud existuje pevně zvolené číslo $q < 1$ takové, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta (Cauchyho limitní odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

Věta (D'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pokud existuje pevně zvolené číslo $q < 1$ takové, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta (D'Alembertovo limitní podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

---

4 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\sqrt{n}}{3^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+9^n}{\sqrt{n}+e^{2n}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\cdot(3n-1)}{3\cdot8\cdot13\cdot\cdot(5n-2)}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}$

*(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

[4] (a) K; (b) K; (c) K; (d) K; (e) K; (f) D; (g) K; (h) K; (i) K; (j) K;

Věta (Leibniz)**.** Nechť posloupnost a_n splňuje následující podmínky:

(a) je monotónní;

(b) splňuje NPK (tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

---

5 Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{5}-1)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+3n-1}{4n^2-n-6}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\log n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(1+\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$

!(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(k\pi)(\sqrt{n}-\sqrt{n-9})$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

!(l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n}$

[5] (a) RK; (b) D; (c) AK; (d) RK; (e) RK; (f) AK; (g) RK; (h) RK; (i) RK: $0<\alpha\leqslant 1$, D: $\alpha\leqslant 0$, AK: $\alpha\geqslant 0$; (j) D pro $|z|>1$ a $z=-1$, RK pro $z=1$, AK pro $|z|<1$; (k) RK; (l) RK;

---

6 Vyšetřete konvergenci následujících řad (zkoušková obtížnost):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}5^n\sin\left(\frac{x}{7^n}\right),\quad x>0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2}\cdot\left(\ln(n^2+1)-\ln n^2\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^3+1+\sqrt{n})-\ln(n^3+1)}{\sin\frac{1}{n^2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(n+1)^4}{3^n\cdot n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{3^n+7^n}{7^n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(2^{2^n}+1)}{\log(2^{4^n}+1)}$

✠(i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\left((-1)^n+1\right)+1}{n\left(n+(-1)^n\right)}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

[6] (a) K; (b) RK; (c) RK; (d) D; (e) D; (f) K; (g) D; (h) K; (i) D;