# Limita posloupnosti

**Definice** (Vlastní limita posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \colon \ |a_n - A| < \varepsilon$$

**Definice.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do nekonečna a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jestliže platí:

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \colon a_n > K$$

**Obdobně definujeme i divergenci do $-\infty$.*

---

$\boxed{1}$ Podle definice limity posloupnosti ověřte následující rovnosti.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \\ \text{neexistuje} & a \leqslant -1 \end{cases}$

---

$\boxed{2}$ Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} e^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n$

(e) $\lim_{n\to\infty} n^2$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

(g) $\lim_{n\to\infty} e^{-n}$

(h) $\lim_{n\to\infty} 2^n$

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \ln n$

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}$

(m) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(n) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$

(o) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(p) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)\sqrt{n}$

[2] (a) $\infty$; (b) 0; (c) $\infty$; (d) 0; (e) $\infty$; (f) 0; (g) 0; (h) $\infty$; (i) $\infty$; (j) 0; (k) $\infty$; (l) 0; (m) neexistuje; (n) neexistuje; (o) 0; (p) neexistuje;

**Věta** (Aritmetika limit - **VOAL**)**.** Má-li jejich pravá strana smysl, platí rovnosti:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

**Poučka.** Tradičním nástrojem při řešení limit s odmocninou je následující vzorec:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1}B^0 + A^{n-2}B^1 + ... + A^1B^{n-2} + A^0B^{n-1})$$

**3** Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{10000n+1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{\pi n^2+1}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - n$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-n^3+4}{n^4+16n^3-1}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4}{n^2+16n-1}$

(g) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+2023}{n-2023}$

(i) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1+2+3+\ldots+n}{2+n} - \frac{n}{2})$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$

(k) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^7-23n-1}{5n^7-23n-1})^3$

(l) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{2n+1})^{10}$

(m) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^5-23n-1}{n^5-23n^3+12n^2-1})^{1000}$

(n) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{50}-(n-1)^{50}}{n^{49}}$

(o) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^{50}-(n-1)^{50}}{n^{50}-(2n-1)^{50}}$

(p) $\lim_{n\to\infty} \frac{(5n+1)^{100}-(5n-1)^{100}}{(5n)^{100}-(5n-1)^{100}}$

[3] (a) $\infty$; (b) 1; (c) $\frac{1}{\pi}$; (d) $-\infty$; (e) 3; (f) $\infty$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) 0; (i) $-\frac{1}{2}$; (j) $\frac{1}{3}$; (k) $\frac{8}{125}$; (l) $\frac{1}{1024}$; (m) 1; (n) 100; (o) $-1$; (p) 2;

**Věta** (Omezená krát nulová)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ („nulová“);

(b) $\{b_n\}_{n=1}^\infty$je omezená

Pak platí: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

**Věta** (O jednom policajtovi)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;

(b) Od jistého indexu $n_0$ platí: $b_n \geqslant a_n$.

Potom platí: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

**Věta** (O dvou policajtech - **2P**)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b \in \mathbb{R}$;

(b) Od jistého indexu $n_0$ platí: $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$.

Pak je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ konvergentní a platí: $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

---

**4** Určete limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sin(n!)}{n+1}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{\cos(n)}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+\sin n+(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} - \frac{\sqrt[3]{n}}{\log n}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

(l) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7}$

(m) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n+2}{2n+1}}$

(n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

(o) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}$

(p) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(q) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-2} - \sqrt{n^2-n}\right)$

(r) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^3-n^2} - \sqrt[3]{2n^3+3n^2+n}\right)$

(s) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+11} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$

(t) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2+17}$

(u) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)n$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\ln(n^2)\right)}{\ln(\ln n))} \cdot \frac{\ln(3n)}{\ln\left(n^5\right)}$

[4] (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 0; (f) neexistuje; (g) 0; (h) $\infty$; (i) $-\infty$; (j) 1; (k) 1; (l) 1; (m) 1; (n) $\infty$; (o) 4; (p) 0; (q) $\frac{3}{2}$; (r) $-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$; (s) $\frac{5}{3}$; (t) 0; (u) $\frac{11}{6}$; (v) $\frac{1}{5}$;

**Věta** (Růstová škála)**.** Od jisté hodnoty $n$ platí:

$$\log(\log(n)) \ll \log n \ll n^{\frac{1}{1000}} \ll n \ll n^{1000} \ll 1,001^n \ll 1000^n \ll n! \ll n^n$$

kde zápis $a_n \ll b_n$ znamená „$a_n$ roste výrazně pomaleji než $b_n$“, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

**Lze snadno ukázat, že Relace $\ll$ je tranzitivní.*

**Poučka.** Stejně jako při práci s polynomy je vhodné vytýkat nejrychleji rostoucí výraz.

---

5 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+102\log n+n^2}{\sqrt{n}-n^{\frac{3}{2}}+2^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n^2}{\sqrt{n}-3^{2n}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n-2\log n+11n^2}}{\sqrt{n}-n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4n-2\log n+11\cdot 27^n}}{(\frac{7}{2})^n+2^n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{(5.0001)^n}$

*(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n!}{n^{\frac{n}{2}}+2^n}$

[5] (a) 0; (b) 0; (c) $-\sqrt{11}$; (d) 0; (e) 0; (f) $\infty$;

**Věta** ($n$-tá odmocnina)**.**

(a) Pro $c>0$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**Věta** (O konečné mocnině a odmocnině)**.** Pro $k \in \mathbb{N}$ platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k$.

**Rozmyslete si, jaké jsou podmínky na limitu posloupnosti $a_n$, aby tato věta dávala smysl.*

**6** Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+3^n+13^n+\ln n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^n+2^n+6^n}}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2n^n+2^n+6^n}}{\sqrt{n}+3}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n+2^n}}{\sqrt[2n]{4^n+3^n}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}+\frac{1}{\pi^n}+\frac{1}{n}}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}+\frac{1}{\pi^n}}$

**[6]** (a) 13; (b) 1; (c) 1; (d) $\frac{3}{2}$; (e) 1; (f) $\frac{1}{2}$;

**Definice** (Eulerovo číslo)**.**

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Poučka.** Příklady vedoucí na $e$ mohou být mnohem záludnější, v takovém případě je výhodné použít Heineho větu a limitu posloupnosti vyřešit jako limitu funkce.

---

**7** Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$

$*$(d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

$*$(e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

$*$(f) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

**[7]** (a) $\sqrt{e}$; (b) $\frac{1}{e}$; (c) $\frac{1}{e}$; (d) $e^6$; (e) $e^2$; (f) $e^a$;