Derivace

Definice (Derivace)**.** Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}^*$, pokud platí:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Alternativní forma zápisu:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Věta (Pravidla derivování)**.** Pro derivování součinu, součtu a složení funkcí $f, \ g$ platí:

(a) $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ (linearita derivace)

(b) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (součin)

(c) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (podíl)

(d) $(f(g(x)))' = f'(x)g'(x)$ (složená funkce)

---

1 Vypočtěte derivaci funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ pomocí definice derivace:

(a) $f(x) = x^2, \quad a = 3$

(b) $f(x) = x^2 - 4x, \quad a = 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1$

(d) $f(x) = x^3, \quad a = 2$

(e) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 4$

(f) $f(x) = \sin x, \quad a = 0$

(g) $f(x) = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{2}$

(h) $f(x) = \sin 2x, \quad a = \frac{\pi}{8}$

[1] (a) 6; (b) -2; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 12; (e) $-\frac{1}{16}$; (f) 1; (g) -1; (h) $\sqrt{2}$;

Poučka. Derivování absolutní hodnoty

$$|x|' = \left(\sqrt{x^2}\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}\right) = \frac{x}{|x|}$$

---

2 Vypočtěte derivaci funkce:

(a) $f(x) = x^2 + x^3 + 5$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = |x - 1|$

(e) $f(x) = x^3 \sin x$

(f) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

(g) $f(x) = \sin x \cos x$

(h) $f(x) = x^2 \sin 2x - 2$

(i) $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

(j) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

(l) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}$

(m) $f(x) = \cos 2x - \sin 2x - 12$

(n) $f(x) = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x$

(o) $f(x) = |x^2 - 4|$

(p) $f(x) = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

(q) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

(r) $f(x) = 4\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x}$

(s) $f(x) = |3x - 7| + \operatorname{tg} x$

!(t) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

!(u) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(v) $f(x) = \log(1 + x) - \log(1 + x^2)$

(w) $f(x) = \frac{\log(3)\sin x + \cos x}{3^x}$

(x) $f(x) = \frac{|\sin x|}{4}\log\frac{x^2-1}{x^2+1}$

(y) $f(x) = e^{-x^2}\cos x \frac{1}{2}\log\log x^2$

(z) $f(x) = \frac{e^{\frac{\sin -x}{x^4}}\log\sin x}{\operatorname{tg} x}$

$\boxed{3}$ Vypočtěte derivaci funkce:

(a) $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$

(b) $f(x) = \arccos\frac{1-x}{x^2}$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$

!(d) $f(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

(e) $f(x) = \arccos\cos^2 x$

(f) $f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(g) $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(h) $f(x) = \log\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$

(i) $f(x) = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccotg} x^6$

(j) $f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \log\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

(k) $f(x) = \log e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}$

(l) $f(x) = \log_x e$

(m) $f(x) = \operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$

(n) $f(x) = \log(\arcsin(\cos x^2))$

(o) $f(x) = \frac{2^x - 3}{x^2}$

(p) $f(x) = 2^x - 3^{x^2} + 5^x$

(q) $f(x) = \log(2^x - 1)$

(r) $f(x) = \sin 7^{3x} + 3x^2$

Poučka. Logaritmická derivace: postup, který zjednodušuje derivování součinu a mocnin funkcí.

$$\log(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Poučka. Derivování obecné mocniny.

$$[g(x)^{f(x)}]' = [e^{f(x)\log g(x)}]' = e^{f(x)\log g(x)} \cdot (f'(x)\log g(x) + \frac{f(x)g'(x)}{g(x)})$$

4 Složité příklady derivací:

(a) $f(x) = x^x$

(b) $f(x) = x^{x^x}$

(c) $f(x) = (1 + \sin x)^x$

(d) $f(x) = (\sin x)^x$

(e) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(f) $f(x) = (e^x + \sin x)^x$

Věta (L'Hopitalovo pravidlo)**.** Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek.

(a) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$

(b) $\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$

Potom platí: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, má-li pravá strana smysl.

---

5 Pro výpočet limity použijte L'Hopitalovo pravidlo: (pokud je zadána limita posloupnosti, použijte Heineho větu)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x \log x$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$

(e) $\lim_{n\to\infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1)n$

(f) $\lim_{n\to\infty} n^8 (2\cos(\frac{1}{n^2}) - 2 + \frac{1}{n^4})$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^3}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2 + e^{2x^2})}{\log(x^2 + e^{3x^2})}$

[5] (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{n}{m}$; (c) 1; (d) $-\frac{1}{2}$; (e) $\log 2$; (f) $\frac{1}{12}$; (g) $-\frac{1}{2}$; (h) $\frac{3}{4}$;

---

6 Příklady zápočtové obtížnosti:

(a) $f(x) = 6^{\frac{3x^2 - \cos x}{\log x}} \sin(\operatorname{arccotg} x^2)$

(b) $f(x) = \log(\sin(\cos(\frac{e^{2x} + x^2}{3})))$

(c) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(3^{x^2} - \cos x^3)}{\log \sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - 14x\cos x^2} - \sin(x^2 \log(5^x - x))$

(e) $f(x) = \sin(\sqrt[3]{x^2})(e^x + \sin x)^{\frac{5}{17}}$

✠(f) $f(x) = \cos(x)^{\sin(x^2)^{\operatorname{tg}(x^3)^{\operatorname{cotg}(x^4)}}}$

---

7 Dokažte následující identitu:

$$\arcsin(\sqrt{1 - 4x}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(8x - 1)$$

---

8 Dokažte, že funkce f je konstantní pro $x \in (0, \infty)$.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{1+x}}$$