Matematická analýza I (NMTM101)

Martin Rmoutil

3. října 2023

Obsah

Předmluva

Tento text má sloužit zejména posluchačům přednášky Matematická analýza 1 pro učitele na MFF UK (předmět NMTM101), které velmi přesně odpovídá, a to ve smyslu obsahu i rozsahu. Obsah je veskrze zaměřen pouze na teoretickou stránku věci, praktické počítání se zde v podstatě neřeší. Tento text tedy neobsahuje látku probíranou na cvičení. Lze ovšem říci, že kdo zvládne učivo tohoto textu, nebude mít problém složit teoretickou část zkoušky. Ale pozor: to neznamená, že čtení těchto poznámek nahradí pravidelnou účast na přednáškách.

Chci maximálně zdůraznit, že tento text vzniká proto, aby se co nejvíce zefektivnilo studium, nikoliv aby se toto studium komplikovalo; nicméně právě to se stane, pokud se student rozhodne přednášku nenavštěvovat, protože „přece všechny potřebné materiály má k dispozici“. Takové úvahy jsou (zejména na začátku) cestou k rychlému – a neúspěšnému – ukončení studia. K jejich odbourání je dobré si uvědomit, že texty vhodné ke studiu matematické analýzy jsou k dispozici dávno a kdokoliv má zájem se touto oblastí matematiky více zaobírat, může je začít studovat. Matematická analýza (jakož ostatně i většina dalších oborů) je tedy v principu přístupná komukoliv, kdo se o ni chce zajímat, a to bez ohledu na to, jestli jde, nebo nejde, o studenta oboru, kde se tento předmět vyučuje. Ale přestože případy takových samotářských nadšenců existují, jsou poměrně řídké: je to dáno tím, že jde o látku poměrně obtížnou, a většina lidí tak pro její zvládnutí v přiměřeném čase potřebuje učitele. Pro studenty vysokých škol jsou těmito učiteli zejména přednášející, což platí o to víc, o co náročnější předmět uvažujeme. A já věřím, že pokud čtete tyto řádky, asi jste už zaslechli, že matematická analýza je svou náročností vyhlášená. Dovolím si ještě sdílet zkušenost z dob vlastních studií: kdykoliv jsem u nějakého předmětu z nějakého důvodu nechodil na přednášku, potřeboval jsem na přípravu ke zkoušce víc než dvojnásobné množství času (u předmětu s rozsahem 4/2 to pak znamenalo i přes dva týdny intenzivního studia) a i tak jsem látku neovládal zdaleka tak dobře, jako kdybych se byl pravidelně účastnil výuky. Závěr je jasný: choďte na přednášku a tato „skripta“ používejte pouze jako doplněk.

K vlastnímu obsahu skript chci říci, že Kapitola 1 pokrývá učivo prvních několika přednášek, kdy je potřeba představit základní koncepty, s nimiž v matematice obecně, a v analýze zejména, pracujeme. Čtení této kapitoly bude bezpochyby poměrně nezáživné a je otázka, zda by nebylo lepší tuto kapitolu zařadit spíše jako apendix. Obsah první kapitoly je každopádně nutné do značné míry zvládnout, ovšem jde o věci, které jsou na zkoušce přítomny pouze implicitně a až na případné vyjmenované výjimky nebudou přímo předmětem zkouškových otázek.

Vlastní látka kurzu matematické analýzy tedy vlastně začíná až Kapitolou 2, kde se začíná probírat klíčový koncept matematické analýzy, a to koncept limity (začneme limitou posloupnosti). V dalších kapitolách probereme postupně základní pojmy nutné ke studiu reálných funkcí jedné reálné proměnné, zejména pak limita a spojitost funkce a derivace funkce. V Kapitole 5 se také stručně seznámíme s teorií nekonečných číselných řad.

Kapitola 1

Úvod

1.1 Jazyk a logika

V této úvodní části stručně představuji některé poznatky (případně související zajímavosti), které tvoří základ pro orientaci v následujících kapitolách i v matematice obecně.

- Matematika je postavena na logice a axiomatické teorii množin.
- Formálně vzato všechny objekty, se kterými pracujeme, jsou množiny (včetně čísel, funkcí atd.).
- Vysoká míra formalizace byla přijata kvůli vznikajícím paradoxům (viz níže Richardův paradox a Russelův paradox).
- Všechna matematická tvrzení (výroky) s nimiž se setkáme, je v principu možné rozepsat do formulí jazyka teorie množin, který si vystačí s následujícími symboly (některé uvedené symboly jsou ve skutečnosti stále redundantní):
  - proměnné a konstanty ($a, b, x, y, x_1, x_2, \alpha, 0, 1, \pi$ atd.);
  - relace $=$ a $\in$;
  - logické spojky $\neg$ (negace), $\wedge$ (konjunkce, "a"), $\vee$ (disjunkce, "nebo"), $\Rightarrow$ (implikace), $\Leftrightarrow$ (ekvivalence);
  - kvantifikátory $\forall$ (obecný) a $\exists$ (existenční);
  - pomocné symboly (různé druhy závorek).
- Z výše uvedených symbolů sestavujeme (podle určitých pravidel) formule našeho formálního jazyka. (Tato pravidla jsou ovšem popsána v *metajazyce*, v našem případě tedy česky.)
- Výrok je potom taková formule, která má nějakou pravdivostní hodnotu (tj. má smysl říci, že je ono tvrzení pravdivé nebo nepravdivé). Pokud výrok platí, řekneme, že jeho pravdivostní hodnota je 1; v opačném případě 0.
- Náš matematický jazyk (jazyk teorie množin) obohacujeme o nové pojmy prostřednictvím definic; ty představují zkratky za složitější formule. Například lze definovat spojitost funkce na $\mathbb{R}$ následující složitější formulí (která sama využívá některé definice, například absolutní hodnotu a $\mathbb{R}$): $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in \mathbb{R} \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Od zavedení této definice můžeme hovořit pouze o spojité funkci a nepotřebujeme vždy vypsat celou tuto formuli.

- Dokazované matematické věty a tvrzení jsou výroky a naším cílem je ukázat, že jejich pravdivostní hodnota je 1. Vycházíme při tom z axiomů teorie množin, což je sada výroků, které přijmeme za platné bez důkazu. V ideálním případě bychom chtěli mít axiomatickou teorii bez vnitřních rozporů (tj. konzistentní) a současně dostatečně bohatou. Tyto dva požadavky jdou v jistém smyslu proti sobě, jak ukázal brněnský rodák Kurt Gödel (1906-1978) ve svých (z filosofického pohledu přelomových) Větách o neúplnosti (1931): Je-li totiž teorie dostatečně bohatá, pak z principu není schopna sama o sobě dokázat, že je konzistentní (to ale neznamená, že konzistentní být nemůže).

- Mezi formálním matematickým jazykem a metajazykem (češtinou) je vhodné umět rozlišovat, jinak se vystavujeme riziku vzniku paradoxů. Příkladem je jednoduchá variace na Richardův paradox (též zvaná Berryho paradox, nebo i Paradox sta slov): *Budiž n nejmenší přirozené číslo, které nejde jednoznačně určit méně než 100 slovy spisovné češtiny.* Zdá se být zřejmé, že čísel, která jde určit méně než 100 slovy českého jazyka (který má konečně mnoho slov), je konečně mnoho. Proto si je v principu můžeme všechna napsat do konečného seznamu a definovat n jako nejmenší přirozené číslo, které se na tomto seznamu nenachází. Vzhledem k tomu, že jsme toto číslo n výše popsali méně než 100 slovy, mělo by však na seznamu být – a máme na světě paradox. Cestou ven je rozlišovat mezi metajazykem a formálním jazykem.

- Výroková funkce je nějaká formule $V(x)$, ze které po dosazení konkrétního x vznikne výrok. (Může být více proměnných; je pak ovšem pro obdržení výroku nutno dosadit za všechny.) Příklad: $x \in \mathbb{Q}$, kde x je proměnná a $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel, není výrok. Dosadíme-li $x = \sqrt{2}$, dostaneme výrok (nepravdivý, jak podle legendy dokázal Hippasos): $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

- Význam kvantifikátorů:
  - $\forall x\colon V(x)$ je výrok, který je pravdivý, pokud $V(x)$ platí po dosazení libovolného x (přesněji, libovolné množiny x) – v opačném případě je nepravdivý.
  - $\exists x\colon V(x)$ je výrok, který je pravdivý, pokud $V(x)$ platí po dosazení alespoň jednoho x.

- Obvykle píšeme $\forall n \in \mathbb{N}$ nebo $\exists a \in (0,1)$ apod., což je také zkratka. Třeba výrok $\forall x \in \mathbb{Q}\colon x \in \mathbb{R}$ se dá rozepsat takto: $\forall x\colon x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

- Zde je tabulka pravdivostních hodnot různých výroků složených z výroků A a B.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1

  Z této tabulky je možné odvodit některé tautologie (výroky platné pro libovolnou kombinaci pravdivostních hodnot A a B (v jednom případě též C – příslušná tabulka by tedy měla 8 řádků místo 4) – tj. pokud bychom pro tyto výroky přidali sloupečky do tabulky výše, byly by v nich samé jedničky a žádná nula); např.:

  - $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$; (implikace je ekvivalentní svojí obměně);
  - $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$; (důkazy sporem);
  - $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$; (implikace je tranzitivní);
  - $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$; (ekvivalence znamená implikace v obou směrech);

- Negace aplikovaná na výrok s kvantifikátorem funguje podle následujících dvou pravidel (budiž $V(x)$ nějaká výroková funkce):

$$\neg(\forall x\colon V(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon \neg V(x);$$
$$\neg(\exists x\colon V(x)) \Leftrightarrow \forall x\colon \neg V(x).$$

- Opakovanou aplikací výše uvedených pravidel lze negovat výroky obsahující dva a více kvantifikátorů. Například (rozmyslete si, co výrok říká a je-li pravdivý):

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon x = y + z) &\Longleftrightarrow\\ \exists x \in \mathbb{R}\ \neg(\forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon x = y + z) &\Longleftrightarrow\\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \neg(\exists z \in \mathbb{R}\colon x = y + z) &\Longleftrightarrow\\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon \neg(x = y + z)&\end{aligned}$$

  V praxi pochopitelně provedeme všechny tři kroky naráz, tj. změníme všechny kvantifikátory na opačné a znegujeme závěrečný výrok.

- Na rozdíl od logických spojek jako konjunkce ($\wedge$) nebo disjunkce ($\vee$), implikaci při běžném vyjadřování často chápeme trochu jinak: s přidaným obecným kvantifikátorem ($\forall$). Řeknu-li například výrok „kdykoliv x je racionální, potom x je reálné", striktně vzato tím nemám na mysli výrokovou funkci $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ (zde x je proměnná této výrokové funkce), nýbrž výrok $\forall x\colon x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ (nebo kratčeji $\forall x \in \mathbb{Q}\colon x \in \mathbb{R}$). Onen obecný kvantifikátor se obvykle při formulaci implikací nezdůrazňuje, rozumí se sám sebou.

1.2 Základy o množinách a zobrazeních

1.2.1 Operace s množinami

Co je to vlastně množina? Axiomatická teorie množin na tuto otázku odpovídá nepřímo výčtem vlastností množin (axiomy). My si vystačíme s následující nepřesnou „naivní definicí" od Georga Cantora (1845-1918), zakladatele teorie množin: *Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a různé (a tvoří součást světa našich představ a myšlenek); tyto objekty nazýváme prvky množiny.* Množina je svými prvky jednoznačně určena (tj. množiny jsou stejné právě tehdy, když mají stejné prvky) a je sama přípustným objektem, a tedy potenciálně prvkem jiné množiny, nebo i sebe sama. Právě toto poslední konstatování je základem Russellova paradoxu (pojmenovaného podle jednoho z největších filosofů Bertranda Russella (1872-1970)), neboť následujícím předpisem lze podle výše uvedené „naivní definice" zadat jistou množinu A takto:

$$A = \{x\colon x \notin x\}.$$

Množina A je tedy množinou obsahující právě každou takovou množinu, která neobsahuje sebe samu jako jeden ze svých prvků (pamatujte, že množiny jsou přípustné prvky jiných množin). Otázka nyní je, zda platí $A \in A$ nebo $A \notin A$; jak se každý snadno přesvědčí, obě varianty ihned vedou ke sporu, a jedná se tedy o paradox (a to navíc velice jednoduchý). Pokud se vám tato forma paradoxu zdá špatně stravitelná, možná pomůže paradox holiče, který holí právě všechny lidi, co se neholí sami. Holí se tento holič sám, nebo ne?

Způsob, jak se takovým paradoxům vyhnout, je pečlivě zvolit vhodnou sadu axiomů, která na jednu stranu neumožní konstrukci žádného známého paradoxu a na stranu druhou poskytne dostatečně bohatou teorii. Nejběžněji používanou je axiomatika Zermelova-Fraenkelova (**ZF**), která je navíc obvykle obohacena o jeden další (filosoficky diskutabilní avšak běžně používaný) axiom, a sice axiom výběru (tato teorie se pak značí **ZFC** místo **ZF**).

Následuje stručný výčet základních vlastností a faktů o množinách a zobrazeních, které budeme po zbytek kurzu z Matematické analýzy potřebovat.

- Jsou-li A a B jakékoliv množiny, symbol $A \subseteq B$ je zkratka za výrok $\forall x\colon x \in A \Rightarrow x \in B$. V tom případě říkáme, že *A je podmnožinou B* a relace $\subseteq$ se nazývá *inkluze*. Dále už stručněji:
- *sjednocení* $A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}$;
- *průnik* $A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$;
- *rozdíl* $A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$ (všimněte si, že na rozdíl od předchozích dvou operací není rozdíl komutativní, tj. záleží v něm na pořadí A a B);
- *doplněk* (též komplement) je operace vztažená k nějaké pevně zvolené nadmnožině: je-li $A \subseteq X$, značíme někdy $A^c = X \setminus A$; například uvažujeme-li interval $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, pak $[0,1]^c = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$;
- *kartézský součin* množin A a B je $A \times B = \{(a,b)\colon a \in A \wedge b \in B\}$, tj. množina všech uspořádaných dvojic prvků z A a z B (v tomto pořadí);
- *prázdnou množinu* značíme symbolem $\emptyset$; prázdná množina neobsahuje žádný prvek. Protože množina je jednoznačně určena svými prvky, existuje jediná prázdná množina. Všimněte si, že pro libovolnou množinu A platí $\emptyset \subseteq A$;
- řekneme, že množiny A a B jsou *disjunktní*, pokud $A \cap B = \emptyset$ (tj. mají prázdný průnik, tj. nemají žádný společný prvek);
- jsou-li $A_1, A_2, \ldots$ množiny, definujeme symboly
$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N \quad \text{a} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{x\colon \exists i \in \mathbb{N}\colon x \in A_i\};$$
- podobně definujeme
$$\bigcap_{i=1}^{N} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N \quad \text{a} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \{x\colon \forall i \in \mathbb{N}\colon x \in A_i\}.$$

Jako hezká ilustrace na použití některých základních množinových operací nám poslouží takzvaná De Morganova pravidla:

Tvrzení. *Nechť X je nějaká množina a $A_i \subseteq X$ pro $i \in \mathbb{N}$ nějaké její podmnožiny. Pak platí vzorce*
$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \quad a \quad X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i).$$
Vzorce rovněž platí, nahradíme-li v nich ∞ konečným číslem N. Speciálně (pro $N = 2$) tedy máme
$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \quad a \quad X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2).$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení probíhá s použitím faktu, že pro libovolné dvě množiny C a D platí $C = D$ tehdy a jen tehdy, když $\forall x\colon x \in C \Leftrightarrow x \in D$. Jinak řečeno rovnost dvou množin znamená přesně to, že mají stejné prvky. Pro důkaz De Morganových pravidel tedy stačí zvolit si libovolné x a dokázat, že x je prvkem množiny na levé straně dokazované identity právě tehdy, když je x prvkem množiny na pravé straně dokazované identity. Provést tento důkaz je snadné cvičení na práci s výroky a definice množinových operací. $\square$

1.2.2 Relace a zobrazení

Pro nás zásadním pojmem je (binární) relace. *Relací* mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Pro relace se definuje řada vlastností (reflexivita, tranzitivita, symetrie, antisymetrie apod.); nás zajímá specifický typ relací, a sice zobrazení.

Řekneme, že relace $f \subseteq A \times B$ je *zobrazení z A do B*, jestliže $\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. Je-li f zobrazení, opouštíme značení $(x, y) \in f$ ve prospěch přehlednějšího a srozumitelnějšího $f(x) = y$. Takovéto značení není možné pro obecné relace R, neboť ona hodnota „$R(x)$“ by nemusela být jednoznačně určena. V případě zobrazení však pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$ (přesně to nám říká ona podmínka v definici zobrazení); pokud tedy existuje, můžeme si toto jediné y dovolit označit symbolem $f(x)$ (který je tím jednoznačně určený).

Je-li f zobrazení z A do B, definujeme:

- *definiční obor* f je množina $\mathbb{D}_f = \{x \in A\colon \exists y \in B\colon f(x) = y\}$;
- *obor hodnot* f je množina $\mathbb{H}_f = \{y \in B\colon \exists x \in A\colon f(x) = y\} = \{f(x)\colon x \in \mathbb{D}_f\}$ (zde a v následujícím bodě tedy uvádím dva ekvivalentní zápisy téže množiny);
- pokud $C \subseteq \mathbb{D}_f$, pak definujeme *obraz množiny C při zobrazení f* jako $f(C) = \{y \in B\colon \exists x \in C\colon f(x) = y\} = \{f(x)\colon x \in C\}$; zjevně tedy platí, že obraz celého definičního oboru je přesně obor hodnot, tj. $f(\mathbb{D}_f) = \mathbb{H}_f$;
- pro libovolnou množinu D (obvykle uvažujeme $D \subseteq B$, ale definice dává smysl i bez toho) definujeme *vzor množiny D při zobrazení f* jako $f^{-1}(D) = \{x \in A\colon f(x) \in D\}$; tj. symbolem $f^{-1}(D)$ značíme množinu všech bodů (definičního oboru f), které se zobrazením f zobrazí na nějaký bod množiny D;[1]
- f je *prosté* (injektivní), jestliže $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
- f je *na* množinu B (surjektivní), jestliže $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y$, tj. jestliže $\mathbb{H}_f = B$.
- f je *bijekce*, jestliže je prosté a zároveň na.

Jestliže f je zobrazení z množiny A do množiny B, které je definováno v každém bodě A (tj. $\mathbb{D}_f = A$), zapisujeme tento fakt stručně symbolem $f\colon A \to B$. V takovém případě hovoříme o zobrazení množiny A (tedy bez předložky „z“) do B (na B, pokud f je na).

Mějte na paměti: symbol $f\colon A \to B$ znamená, že f je definováno na celé množině A. Zadáme-li například funkci f předpisem $f(x) = 1/x$, potom neplatí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, neboť tato funkce není definována ve všech bodech $\mathbb{R}$ (nulou nelze dělit).

Poznamenejme též, že *(reálnou) funkcí* rozumíme jakékoliv zobrazení f, které je do $\mathbb{R}$ (či na $\mathbb{R}$); nezáleží tedy na definičním oboru. Obvykle se však zabýváme reálnými funkcemi jedné reálné proměnné (tedy funkcemi z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$). Formálně vzato je i jakákoliv posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovněž funkcí, a to z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$; v tomto případě však budeme hovořit o posloupnosti, nikoliv o funkci.

- Je-li $f\colon A \to B$ prosté zobrazení, definujeme *inverzní zobrazení* f^{-1} z B do A předpisem $f^{-1}(y) = x$, jestliže $f(x) = y$. Obecněji lze definovat i relaci inverzní k relaci $R \subseteq A \times B$ jako $R^{-1} = \{(y, x)\colon (x, y) \in R\}$. Potom R^{-1} je podmnožina $B \times A$, která vznikne z R tak, že všem prvkům R

[1] Pozor, symbol f^{-1} používáme také k označení inverzní funkce (více o tom níže). Lze říci, že tato kolize značení je běžná a obvykle nevede k nedorozuměním.

(což jsou uspořádané dvojice) prohodíme souřadnice. Výše uvedená definice inverzního zobrazení je potom speciálním případem inverzní relace, jak si můžete sami snadno ověřit přímo z definic.[2]

- Jsou-li f a g zobrazení, definujeme *složené zobrazení* $g \circ f$ předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro každé x takové, že $x \in \mathbb{D}_f \wedge f(x) \in \mathbb{D}_g$. Často se nacházíme v situaci, kdy $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ (všimněte si role množiny B); v takovém případě můžeme uvažovat složené zobrazení $g \circ f$ bez starostí s definičními obory (připomeňte si, že symbol $g\colon B \to C$ mimo jiné značí, že g je definováno na celé množině B).

- Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení a $C \subseteq A$. Potom zobrazení $g\colon C \to B$ definované jako $g(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$ nazýváme *restrikce zobrazení f na množinu C*. Zobrazení g značíme symbolem $f|_C$. Řečeno slovy, restrikce zobrazení na nějakou podmnožinu definičního oboru není nic jiného než to samé zobrazení „zúžené“ na nějakou menší množinu (vlastně tedy pouze „uměle zmenšíme definiční obor našeho zobrazení“). Místo slova „restrikce“ se někdy používá též „zúžení“.

1.2.3 Mohutnost množin

Následující pojmy nám umožňují množiny klasifikovat podle počtu prvků, tedy *mohutnosti* (též *kardinality*).

- Řekneme, že množiny A a B mají *stejnou mohutnost*, jestliže existuje bijekce $f\colon A \to B$. V tom případě píšeme $|A| = |B|$. Rozmysleme si, že $(|A| = |B| \wedge |B| = |C|) \Rightarrow |A| = |C|$: Skutečně, předpoklad uvedené implikace podle definice znamená, že existují bijekce $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$. Pro dokončení důkazu si tedy stačí rozmyslet, že $g \circ f\colon A \to C$ je rovněž bijekce (a tedy máme $|A| = |C|$). To už je jednoduché cvičení na definici bijekce, které by každý měl zvládnout.

- Řekneme, že množina A *má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti* množiny B, jestliže existuje prosté zobrazení $f\colon A \to B$. V tom případě píšeme $|A| \leqslant |B|$.

- Množina A se nazývá *konečná*, jestliže je buďto prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že A má stejnou mohutnost jako množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ (pak tedy A má právě n prvků a píšeme $|A| = n$).

- Množina se nazývá *nekonečná*, není-li konečná.

- Množina se nazývá *spočetná*, pokud je buďto konečná, nebo má mohutnost množiny $\mathbb{N}$ (a je tedy nekonečná). Můžeme si představovat, že nekonečné spočetné množiny jsou takové, jejichž prvky se dají napsat do seznamu číslovaného přirozenými čísly (tento seznam je pak vlastně onou bijekcí mezi naší množinou a $\mathbb{N}$).

- Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá *nespočetná*.

Jedním ze základních poznatků teorie množin je následující věta, která platí zcela obecně, je ale zajímavá především pro nekonečné množiny A, B.

Věta (Cantorova-Bernsteinova)**.** *Ať A a B jsou množiny splňující $|A| \leqslant |B|$ a zároveň $|B| \leqslant |A|$. Pak $|A| = |B|$.*

---

[2] V případě, že f je prosté zobrazení a f^{-1} je zobrazení k němu inverzní, pak pro nějakou množinu $D \subseteq \mathbb{H}_f$ má v tuto chvíli symbol $f^{-1}(D)$ dva definované významy: za prvé ho můžeme interpretovat jako obraz D při zobrazení f^{-1} a za druhé jako vzor D při zobrazení f. Jak si ovšem snadno můžete rozmyslet, obě interpretace jsou odlišné jen zdánlivě, ve skutečnosti vyjdou nastejno. Tato kolize značení tedy ničemu nevadí; z kontextu bude ostatně vždy zřejmé, kterou interpretaci máme v daném případě na mysli.

Mohutnost konečných množin (tedy počet prvků) funguje tak, jak jsme zvyklí; odebereme-li z konečné množiny jeden prvek, její mohutnost se sníží o 1. Nebo, máme-li konečné množiny A a B takové, že $|A| = m$ a $|B| = n$ (tj., mají pořadě m a n prvků), pak pro mohutnost jejich kartézského součinu platí, co bychom čekali: $|A \times B| = m \cdot n$. Podobně bychom mohli pokračovat i pro sjednocení (disjunktních) množin atd. Fungování mohutností u množin nekonečných je však v rozporu s intuicí nabytou z našich každodenních zkušeností.

Následuje výčet vlastností spočetných množin (správně bychom měli tato tvrzení dokázat).

- *Libovolná podmnožina spočetné množiny je spočetná.* Důsledek tohoto tvrzení je, že pokud $A \subseteq \mathbb{N}$ není konečná, má už stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$ – například tedy sudých čísel „je stejně“ jako všech přirozených čísel.
- *Nechť $f : A \to \mathbb{N}$ je prosté zobrazení; potom množina A je spočetná.*
- *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.*
- *Kartézský součin dvou spočetných množin je spočetný.*
- *Obraz spočetné množiny při libovolném zobrazení je spočetná množina.*
- *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou množinu.* Tento fakt lze chápat tak, že spočetné množiny jsou, co do počtu prvků, „nejmenšími nekonečnými množinami“.

Příklad. Všechny následující množiny jsou nekonečné a spočetné: $\mathbb{N}, S = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$ (tedy množina všech sudých čísel), $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Platí tedy například, že $|\mathbb{N}| = |S|$, ačkoliv $\mathbb{N}$ má zjevně „více“ prvků (kromě všech sudých čísel obsahuje ještě nekonečně mnoho lichých) – je snadné toto tvrzení dokázat; podle definice stačí jen najít bijekci mezi množinami $\mathbb{N}$ a S. Takovou bijekcí je třeba zobrazení $f : \mathbb{N} \to S$ definované pro každé $n \in \mathbb{N}$ předpisem $f(n) = 2n$ (ověřte, že jde o bijekci). Podobně platí, že $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Ještě překvapivější by mohlo být tvrzení, že $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. Pro ilustraci zde tento fakt dokážeme, a to s použitím výše uvedeného faktu, že kartézský součin spočetných množin je spočetný – tedy součin $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je spočetný. Dále si uvědomme, že každé racionální číslo kromě nuly jednoznačně určuje zlomek v základním tvaru (tedy nesoudělného čitatele a jmenovatele) $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Každému racionálnímu číslu tedy odpovídá nějaká uspořádaná dvojice (p, q), kde první číslo je čitatelem příslušného zlomku v základním tvaru a druhé číslo je jeho jmenovatelem; nule přiřadíme dvojici $(0, 1)$. Dostáváme tedy zobrazení (označme ho f) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, které je navíc zjevně prosté (pro různá racionální čísla dostaneme různé zlomky, a tedy různé dvojice „(čitatel, jmenovatel)“). Podle definice tedy dostáváme, že $|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{N}|$; protože opačná nerovnost je snadno vidět (ověřte to!) z toho, že $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, splnili jsme předpoklady Cantorovy-Bernsteinovy věty (totiž platnost obou nerovností) a dostáváme tedy, že $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. $\triangle$

Následující fundamentální fakt ukazuje, že existují různé nekonečné mohutnosti; tj. ne všechny nekonečné množiny mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

Věta (Cantor)**.** *$\mathbb{R}$ je nespočetná množina.*

Poznámka o Hypotéze kontinua: Má-li nějaká množina A stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$, říkáme, že *A má mohutnost kontinua*. Takzvaná *Hypotéza kontinua* (anglicky *Continuum Hypothesis*) je následující výrok:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leqslant |\mathbb{N}| \vee |A| = |\mathbb{R}|. \tag{CH}$$

Z výše uvedené Cantorovy věty víme, že množina $\mathbb{R}$ není spočetná, a má tedy větší mohutnost než $\mathbb{N}$. Hypotéza kontinua tvrdí, že každá nekonečná množina reálných čísel je buďto spočetná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$, tedy *mohutnost kontinua* (tvrzení (CH) tedy je, že neexistuje žádná další mohutnost mezi mohutností $\mathbb{N}$ a mohutností kontinua).

Hypotézu zformuloval Georg Cantor v 70. letech 19. století a věřil, že dříve či později se ji podaří dokázat. Tento základní otevřený problém v teorii množin (tedy základní matematické teorii) přirozeně zajímal další matematiky, nikomu se však nedařilo (CH) dokázat (ani vyvrátit), a tak se Hypotéza kontinua dostala na první místo slavného Hilbertova seznamu problémů (David Hilbert (1862-1943)) z roku 1900, který zásadním způsobem ovlivnil směřování matematiky ve 20. století.

V roce 1940 Kurt Gödel dokázal, že *negace* (CH) je nedokazatelná (tj. neexistuje důkaz) z axiomů **ZFC** (právě s těmito axiomy pracujeme my i většina ostatních matematiků – viz výše) – to však ještě neznamenalo, že existuje nějaký důkaz pro (CH)! Úplného řešení se problém dočkal až v roce 1963, kdy Paul Cohen (1934-2007) revoluční metodou dokázal, že ani Hypotéza kontinua samotná není dokazatelná z axiomů **ZFC**; spojením těchto dvou výsledků tedy dostáváme, že (CH) je *nezávislá* na axiomech **ZFC**. To v podstatě znamená, že se dá k axiomům **ZFC** přidat jako další axiom jak výrok (CH), tak i jeho negace, aniž by se tím do naší teorie dostal spor. Cohen za svůj výsledek dostal v roce 1966 Fieldsovu medaili, nejprestižnější ocenění matematiků (za matematiku se neuděluje Nobelova cena, kterou v podstatě nahrazuje tak zvaná Abelova cena; Fieldsova medaile je specifická tím, že se uděluje pouze za výsledky získané do 40. roku života, a je vnímána jako ještě prestižnější; ani jednu z cen nezískal žádný Čech).

1.3 Číselné obory, zejména reálná čísla

1.3.1 Co považujeme za známé

V následujícím budeme považovat za známé následující pojmy (majíce ovšem na paměti, že i ty je ve formální teorii potřeba nějak definovat – viz třeba článek na Wikipedii, jehož délka dává znát, že ani koncept přirozených čísel není zdaleka triviální):

- $\mathbb{N}$ – přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$ s operacemi sčítání a násobení;
- $\mathbb{Z}$ – celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ – máme navíc odčítání;
- $\mathbb{Q}$ – racionální čísla ($\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$) – máme navíc dělení.

Povšimněme si, že celá čísla mají následující vlastnost:

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ \forall l \in \mathbb{Z} : k - l \in \mathbb{Z},$$

tedy rozdíl libovolných dvou celých čísel je opět celé číslo. Říkáme, že celá čísla jsou *uzavřená na operaci odčítání*; to zjevně neplatí pro $\mathbb{N}$. Podobně si lze povšimnout, že čísla racionální jsou uzavřená na operaci dělení (musíme vyloučit případ dělení nulou), což je vlastnost, která nám chybí u čísel celých; racionální čísla tedy splňují všechny níže uvedené axiomy *uspořádaného tělesa*.

Racionální čísla jsou také *hustě rozložená*, což lze přeložit tak, že mezi každými dvěma racionálními čísly najdeme jiné racionální číslo (skutečně, jsou-li p a q racionální čísla a $p < q$, pak jejich aritmetický průměr $r = \frac{p+q}{2}$ je racionální číslo splňující $p < r < q$) – opakovaným použitím tohoto argumentu dostaneme, že mezi každými dvěma různými racionálními čísly existuje dokonce nekonečně mnoho různých racionálních čísel.

Můžeme se tedy ptát, proč nám racionální čísla nestačí. Vždyť v reálném životě jiná čísla než racionální stejně nedovedeme přesně vyčíslit. Bohužel, pro provozování matematické analýzy nám „přibližné hodnoty nestačí“, potřebujeme zkrátka mít „kontinuum čísel“ a to nám čísla racionální neposkytují: ačkoliv jsou totiž hustě rozložená, jasně vidíme, že „reálnou osu“ nevyplňují celou – například neexistuje racionální řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$, neboť obě řešení této rovnice, tedy $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, jsou čísla iracionální. Pokud bychom tedy pracovali pouze s racionálními čísly, potom by funkce $f(x) = x^2 - 2$ neměla v žádném bodě nulovou hodnotu, ačkoliv „je spojitá“[3] a nabývá záporných i kladných hodnot.

Mluvíme zde o tom, že kromě čísel racionálních, kterým snadno rozumíme jakožto poměrům celočíselných veličin, existují i čísla iracionální, existují tedy tzv. nesouměřitelné veličiny. Nejdůležitější a historicky prvním příkladem nesouměřitelných veličin jsou délky úhlopříčky a strany čtverce, které jsou v poměru $\sqrt{2} : 1$, jak ihned plyne z Pýthagorovy věty.

Potřebujeme tedy nejenom hustotu, nýbrž taky „nepřerušovanost“ (kontinuitu – kontinuum), tedy vlastnost, která odlišuje reálná čísla od racionálních a je zachycena ve Větě o supremu níže.

1.3.2 Definice reálných čísel

Poznámka o Dedekindových řezech: Existují různé způsoby, jak zavést reálná čísla. Asi nejelegantněji to lze provést pomocí tak zvaných *Dedekindových řezů* (viz Wikipedia); tuto metodu nebudeme podrobněji studovat, pro zajímavost jen v tomto odstavci stručně popíšeme její podstatu (metoda je podrobně vyložena například v učebnici *Diferenciální počet I* od V. Jarníka): je založena na jednoduchém pozorování, že libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ jedinečným způsobem dělí („řeže!“) množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel na podmnožiny $A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant \alpha\}$ a $B = \{q \in \mathbb{Q} : q > \alpha\}$. Dvojici (A, B) nazýváme řezem a definujeme jím právě reálné číslo α – určit číslo α tedy znamená dát ty dvě množiny. (Pochopitelně však při budování této teorie smíme vycházet jen z toho, co je nám již známé, tedy výhradně z čísel racionálních – v definici obecného řezu nesmí vystupovat žádné obecné reálné číslo. Šlo by ale definovat číslo $\sqrt{2}$ jako řez (C, D), kde $D = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \wedge q^2 > 2\}$ a $C = \mathbb{Q} \setminus D$.) Při tomto pojetí jsou tedy reálná čísla definována jako řezy a je nutno na nich zavést algebraické operace (sčítání atd.) a lineární uspořádání (tj. definovat, co to znamená, že $(A, B) < (C, D)$, kde (A, B) a (C, D) jsou řezy) a dokázat, že vzniklá struktura splňuje všechny požadované vlastnosti, včetně Věty o supremu.

Definice pomocí desetinných rozvojů: Více intuitivní přístup, kterého se budeme držet i my, zavádí reálná čísla následovně pomocí *desetinných rozvojů*. Nepříjemnou vlastností této definice je, že si musíme nejprve zvolit soustavu, vzhledem které budeme rozvoje uvažovat – v našem případě soustavu desítkovou (tedy se základem 10) a hovoříme tedy o destinných rozvojích. Kdybychom se však vyvinuli s šesti prsty na každé ruce, dost možná bychom dnes pracovali v (podle mnohých výhodnější) dvanáctkové soustavě.

Na tomto místě chci všem doporučit toto video z projektu TED-Ed. (Na téže stránce lze najít pětiminutová videa obsahující nejrůznější zajímavosti. Podle mě by se každý člověk se zájmem o svět měl dozvědět o projektu TED. Viz též zde, kde se můžete dívat na (serióznější) krátké přednášky o nejrůznějších věcech; stačí si jen vybrat téma, které vás zajímá, a začít sledovat – skoro vždy to bude zajímavé a k zamyšlení.)

Definice. Reálná čísla definujeme jako nekonečné desetinné rozvoje, tedy symboly tvaru

$$\alpha = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots, \text{ kde } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ a platí } a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ pro } i \geqslant 1, \tag{1.1}$$

přičemž vylučujeme všechny rozvoje končící periodou 9.

Čísla, jejichž desetinné rozvoje obvykle vnímáme jako konečné, např. $\frac{1}{4} = 0{,}25$, budeme ztotožňovat s příslušným rozvojem končícím nekonečnou posloupností nul, tj. $0{,}25000\ldots$ a podobně. Naopak Eulerovo číslo (základ přirozených logaritmů) $e = 2{,}718281828\ldots$ má rozvoj nekonečný (a, ač se to při pohledu

---

[3] Zde píši uvozovky kvůli tomu, že pojem spojitosti funkce jsme ještě neprobrali, takže v tento moment mi nezbývá, než se opřít o čtenářovu intuici a představivost. Jak uvidíme dále, tvrzení nicméně platí i bez uvozovek a jeho přesný význam je ve velmi dobrém souladu s naší intuitivní představou. Mimo jiné platí tzv. Bolzanova věta 3.13, která přímo říká, že zde uvedená funkce f skutečně musí nabývat v nějakém bodě (ve znění věty je označen x_0) nulové hodnoty.

na prvních několik cifer nezdá, neperiodický, neboť jde o číslo iracionální – viz níže). Intuitivní význam tohoto zápisu lze na těchto příkladech znázornit takto:

$$0{,}25 = 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \quad \text{a} \quad 2{,}718\ldots = 2 \cdot 10^{0} + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + \ldots.$$

Pro úplnost připomeňme, že

$$10^{-k} = \left(\frac{1}{10}\right)^k = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k-1 \text{ nul}}1.$$

To nám taky dává návod, jak jakékoliv reálné číslo dané desetinným rozvojem libovolně přesně aproximovat číslem racionálním – třeba číslo α z rovnice (1.1) je s chybou nejvýše 10^{-n} rovno $a_0{,}a_1\ldots a_n$ (a toto poslední číslo s konečným rozvojem až po cifru a_n interpretujeme jako součet $a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_n \cdot 10^{-n}$).

Na množině reálných čísel zavedených pomocí rozvojů lze definovat operace *sčítání* a *násobení* a relaci *lineárního uspořádání* ($\leqslant$), které fungují v souladu s naší intuicí (my tyto kroky vynecháme, nejsou však obtížné); výslednou strukturu, která splňuje všechny následující vlastnosti (někdy chápané jako axiomy – my je však můžeme dokázat z naší definice a jsou to tedy pro nás matematické věty) nazýváme *reálná čísla*. Následuje výčet vlastností, které společně s platností Věty o supremu charakterizují reálná čísla (tím se chce říct, že v jistém smyslu existuje jediná struktura všechny tyto vlastnosti splňující, a tou jsou právě reálná čísla – současně to ale taky znamená, že všechny ostatní vlastnosti reálných čísel se dají odvodit z těchto vlastností základních). Tyto vlastnosti se dělí do dvou skupin:

1.3.3 Reálná čísla jako uspořádané těleso

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- Sčítání i násobení jsou *asociativní*, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) + z = x + (y + z) \quad \wedge \quad x(yz) = (xy)z.$$

- Sčítání i násobení jsou *komutativní*, tj.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x \quad \wedge \quad xy = yx.$$

- Operace násobení je *distributivní* vůči sčítání, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x(y + z) = xy + xz.$$

- Existence *neutrálního prvku* vzhledem ke sčítání i k násobení, tj.

$$\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x + 0 = x \quad \wedge \quad \exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x \quad \wedge \quad 1 \neq 0.$$

- Existence *inverzního prvku* vzhledem ke sčítání i k násobení, tj.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon x + z = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists z \in \mathbb{R}\colon xz = 1.$$

  Poznámka: inverzní prvek k $x \in \mathbb{R}$ vzhledem ke sčítání (resp. k násobení) je určen jednoznačně a značíme jej $-x$ (resp. x^{-1} nebo také $\frac{1}{x}$).

Tato první skupina axiomů tvoří takzvané axiomy *komutativního tělesa* (též *pole*). Řekneme-li tedy, že $\mathbb{R}$ s operacemi sčítání, násobení, odčítání a dělení tvoří komutativní těleso, máme tím na mysli právě tyto výše uvedené axiomy. Všimněte si, že například $\mathbb{Z}$ s těmito operacemi těleso tvořit nemůže, neboť dělení (respektive existence inverzního prvku pro násobení) není v $\mathbb{Z}$ zaručena. Vidíme tedy, že některé struktury (jako $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$) komutativní tělesa jsou, jiné ne. (Poznamenejme ještě, že slovo „těleso“ je zde použito ve zcela jiném významu, než jsme zvyklí z geometrie.)

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- Relace $\leqslant$ je *lineární uspořádání*, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z \qquad \text{(tranzitivita)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x) \Rightarrow x = y \qquad \text{(slabá antisymetrie)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x) \qquad \text{(linearita)}$$

- Uspořádání se zachovává sčítáním, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$$

- Uspořádání se zachovává násobením kladnými čísly, tj.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0) \Rightarrow 0 \leqslant x \cdot y.$$

Je snadné ověřit, že racionální čísla splňují všechny vlastnosti uvedené v odstavcích I. a II. To, co odlišuje reálná čísla od čísel racionálních (a co nám umožňuje na reálných číslech dělat analýzu), je Věta supremu, která říká něco o shora omezených množinách a supremu – nyní si tedy tyto pojmy definujeme.

1.3.4 Věta o supremu a její důsledky

Definice. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $x \leqslant K$. Takové číslo K nazýváme *horní závora* množiny M. Analogicky definujeme pojmy *zdola omezené množiny* a *dolní závory*. Řekneme, že množina je *omezená*, pokud je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je nějaká množina. Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující

- s je horní závora M a
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x > s - \varepsilon$ (tedy žádné číslo menší než s není horní závorou)

nazýváme *supremum* množiny M.

Má-li množina M supremum, je toto supremum určeno jednoznačně (ověřte z definice, že tomu tak skutečně je!) a značíme jej $\sup M$. Pokud navíc platí, že $\sup M \in M$, pak $\sup M$ nazýváme též *maximem* (*největším prvkem*) množiny M a značíme jej $\max M$ (pak tedy máme $\max M = \sup M$. Analogickým způsobem definujeme také *infimum* množiny M: je to číslo $r \in \mathbb{R}$ splňující

- r je dolní závora M a
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x < r + \varepsilon$ (tedy žádné číslo větší než r není dolní závorou).

Opět platí, že infimum je určeno jednoznačně. Infimum množiny M značíme symbolem $\inf M$ a pokud $\inf M \in M$, hovoříme též i *minimu* množiny M a značíme ho $\min M = \inf M$.

Věta. *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*
(A také: Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.)

Příklad. Všimněme si, že ne každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má maximum – třeba interval $(0, 1)$ největší prvek nemá. To je snadno vidět, neboť ať si vezmeme jakékoliv číslo $x \in (0, 1)$, můžeme v $(0, 1)$ najít číslo větší (například $\frac{x+1}{2}$). Snadno se ale z definice suprema ověří, že $\sup(0, 1) = 1$: skutečně, 1 je samozřejmě horní závorou $(0, 1)$ a právě jsme ukázali, že je horní závorou nejmenší (jakékoliv menší číslo má totiž nad sebou jiné prvky $(0, 1)$, a tedy nemůže být samo horní závorou). Interval $[0, 1)$ má minimum (a tedy i infimum), ale nemá maximum (má ale aspoň supremum). △

Důkaz Věty o supremu. Mějme dánu neprázdnou shora omezenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$; pro jednoduchost se omezíme pouze na případ, kdy $M \cap [0, \infty) \neq \emptyset$ (tedy případ, kdy M obsahuje nějaké nezáporné číslo - a tedy i $\sup M$ musí vyjít nezáporné). Důkaz pro opačný případ (tj. pro případ, kdy $M \subseteq (-\infty, 0)$) by probíhal velmi podobně.

Supremum M budeme postupně upřesňovat cifru po cifře jeho desetinného rozvoje. Podívejme se tedy nejprve na část před desetinnou čárkou – položme

$$s_0 = \max\{a \in \mathbb{Z} \colon M \cap [a, a+1) \neq \emptyset\}. \tag{1.2}$$

Nejprve je potřeba si uvědomit, že definice s_0 vůbec dává smysl. Všimněme si, že ona množina, z níž bereme maximum, je neprázdná – to plyne z našeho předpokladu, že M je neprázdná, a musí tedy protínat alespoň jeden z intervalů tvaru $[a, a+1)$, kde $a \in \mathbb{Z}$, neboť tyto intervaly dohromady pokrývají celou reálnou přímku. Dále je však množina v rovnici (1.2) shora omezená, což je jasné z toho, že stejnou vlastnost má podle předpokladu věty i M. Protože se tedy jedná o neprázdnou shora omezenou množinu *celých čísel*, existuje její maximum – a to jsme si označili s_0. (Velmi neformálně řečeno, pokryli jsme si reálnou přímku intervaly o délce 1 začínajícími v celých číslech; protože M je neprázdná, některé z těchto intervalů protínají M a s_0 je začátek toho z nich, který je nejvíce vpravo.)

Jelikož jsme předpokládali, že $M \cap [0, \infty) \neq \emptyset$, jest $s_0 \geqslant 0$. Nyní definujeme první cifru desetinného rozvoje hledaného čísla za desetinnou čárkou:

$$s_1 = \max\left\{a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \colon M \cap \left[s_0 + \frac{a}{10}, s_0 + \frac{a+1}{10}\right) \neq \emptyset\right\}.$$

Množina, z níž zde bereme maximum, je zjevně konečná a je taky neprázdná, protože podle definice s_0 víme, že M protíná interval $[s_0, s_0 + 1)$ a intervaly tvaru $[s_0 + \frac{a}{10}, s_0 + \frac{a+1}{10})$ ho jen rozdělí na deset stejně velkých částí (a celý ho pokrývají) – aspoň jeden z těchto desetinových intervalů tedy určitě protne M. Tím pádem je číslo s_1 dobře definované.

Podobně postupujeme dále, až sestavíme nekonečnou posloupnost cifer $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňující pro $i \geqslant 1$,

$$s_i = \max\left\{a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \colon M \cap \left[(s_0{,}s_1 s_2 \ldots s_{i-1}) + \frac{a}{10^i}, (s_0{,}s_1 s_2 \ldots s_{i-1}) + \frac{a+1}{10^i}\right) \neq \emptyset\right\}, \tag{1.3}$$

kde zápisem $(s_0{,}s_1 s_2 \ldots s_{i-1})$ rozumíme číslo s tímto desetinným rozvojem (chcete-li, jde přesně o číslo $\sum_{i=0}^{i-1} s_i \cdot 10^{-i}$). Neformálně řečeno význam této rovnice třeba pro $i = 2$ je, že hledané číslo (číslo s z rovnice (1.4)) určujeme s přesností na $\frac{1}{10^2}$, tj. na setiny, atd.

Dostali jsme tedy nějaké číslo

$$s = s_0{,}s_1 s_2 \ldots \geqslant 0 \tag{1.4}$$

(pokud tento rozvoj končí periodou $\overline{9}$, kterou nepřipouštíme, uvažujeme zkrátka to reálné číslo s konečným rozvojem, které rozvoji (1.4) odpovídá) a naším cílem je dokázat, že $s = \sup M$, tj. chceme ověřit obě podmínky z definice suprema. Předpokládejme pro spor, že s není horní závora M; pak existuje číslo $t \in M$, $t > s$,

$$t = t_0{,}t_1 t_2 \ldots .$$

Protože $t > s \geqslant 0$, můžeme si vzít nejmenší $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $t_i > s_i$; tím pádem všechny předchozí cifry s a t jsou stejné, tj. pro všechna $j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ platí $t_j = s_j$ (pro tato j totiž nemůže být $t_j > s_j$, protože i-tá je první cifra, kde toto nastane, a nemůže tedy ani být $t_j < s_j$, neboť to by znamenalo, že $t < s$). To je ale spor s i-tým krokem naší konstrukce (měli jsme zvolit t_i místo s_i).

Víme už, že s je horní závora; nyní ověříme druhou podmínku z definice suprema. Zvolme tedy libovolné $\varepsilon > 0$ a označme $r = s - \varepsilon$. Protože $r < s$, můžeme si (podobně jako výše), vzít nejmenší $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $r_i < s_i$. Pokud $i = 0$, použijeme rovnici (1.2) která nám říká, že existuje nějaké $t \in M \cap [s_0, s_0 + 1)$, a toto $t \in M$ je evidentně větší než r, protože máme $r < s_0 \leqslant t$. Pokud $i > 0$, použijeme podobným způsobem rovnici (1.3) s využitím faktu, že $r_0{,}r_1 \ldots r_{i-1} = s_0{,}s_1 \ldots s_{i-1}$ (který odvodíme úplně stejně, jako o odstavec výše pro s a t): zvolíme libovolný prvek

$$t \in M \cap \left[(s_0{,}s_1 s_2 \ldots s_{i-1}) + \frac{s_i}{10^i}, (s_0{,}s_1 s_2 \ldots s_{i-1}) + \frac{s_i + 1}{10^i}\right) \neq \emptyset,$$

a dostaneme, že $t > r$. Dokázali jsme tedy, že žádné menší číslo než s není horní závorou M, čímž jsme ověřili i druhou podmínku z definice suprema, a důkaz je tím hotov. □

Věta (Archimédův „axiom“ a jeho důsledky)**.** *O reálných a přirozených číslech platí následující výroky:*

(A) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x < n$*;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$*;*

(iii) pro každé $x \in \mathbb{R}$ *existuje celé číslo* $\lfloor x \rfloor$ *takové, že* $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$*; toto číslo* $\lfloor x \rfloor$ *nazýváme* dolní celou částí x*;*

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q}\colon x < y \Rightarrow x < q < y$*.*

Důkaz. (A): Dokážeme sporem; předpokládejme tedy negaci dokazovaného výroku, tj. nechť

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x \geqslant n.$$

Řečeno slovy, předpokládejme existenci nějakého reálného čísla x, které je větší než všechna přirozená čísla (tj. x je horní závora $\mathbb{N}$). To ovšem znamená, že množina $\mathbb{N}$ je shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$, a podle Věty o supremu tedy musí existovat $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Protože supremum je podle definice nejmenší horní závora, číslo $s - 1$ už není horní závora $\mathbb{N}$, a tedy musí existovat nějaké přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ větší než $s - 1$, tj. $N > s - 1$. Pak ale $N + 1 > s$, neboli $N + 1$ je přirozené číslo větší než supremum s množiny $\mathbb{N}$, což je samozřejmě spor s definicí suprema (přesněji: s tím, že supremum je horní závora).

(ii): Všimněme si, že, pro libovolná čísla $\varepsilon > 0$ (reálné) a $n \in \mathbb{N}$ jest

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Problém nalézt co nejmenší zlomek tvaru $1/n$ se tedy může převést na problém najít co největší přirozené číslo, což ale umíme díky (A). Skutečně, budiž dáno libovolné (libovolně malé) reálné číslo $\varepsilon > 0$. Pak $1/\varepsilon \in \mathbb{R}$, a podle (A) tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ větší než $1/\varepsilon$. Podle výše uvedené ekvivalence tedy platí $1/n < \varepsilon$. Tím je důkaz hotov, protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, a je tedy jasné, že vhodné n opravdu jsme schopni najít pro libovolné $\varepsilon > 0$.

(iii): Mějme dáno libovolné reálné číslo x. Abychom se v důkazu odkazovali pouze na známé vlastnosti přirozených čísel (a definici záporných celých čísel jako přirozených čísel „opatřených opačným znaménkem“), rozlišíme několik případů. Předně, pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak $\lfloor x \rfloor = x$ splňuje dokazované nerovnosti (skutečně platí $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor$ a $\lfloor x \rfloor$ je celé číslo), a není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a podívejme se nejprve na případ $x > 0$. Pokud $x \in (0, 1)$, pak stačí vzít $\lfloor x \rfloor = 0$ a jsme opět hotovi, takže uvažujme případ $x > 1$. Potom je množina $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant x\}$ všech přirozených čísel menších než x určitě neprázdná (obsahuje totiž 1) a shora omezená (číslem x). Podle Věty o supremu tedy existuje $s = \sup A$. Protože $s - 1$ (z definice suprema) není horní závora A, musí existovat $n \in A$, $n > s - 1$, a tedy $n \in (s - 1, s]$. V tomto intervalu však jde evidentně o jediné přirozené číslo (to plyne ze základních vlastností přirozených čísel, které považujeme za známé). Odtud je ale jasné, že $n = \max A = \sup A = s$, a tedy $s \in A$ je maximum (tj. supremum, které je prvkem množiny). Tím pádem $s + 1 \notin A$, tj. (podle definice A) $x < s + 1$. Celkem: $s \leqslant x < s + 1$, takže stačí položit $\lfloor x \rfloor = s \in \mathbb{N}$ a dostáváme požadované nerovnosti

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Pokud $x < 0$ (a $x \notin \mathbb{Z}$), pak $-x > 0$, a existuje tedy $\lfloor -x \rfloor \in \mathbb{Z}$ takové, že $\lfloor -x \rfloor \leqslant -x < \lfloor -x \rfloor + 1$. Navíc, protože $x \notin \mathbb{Z}$, můžeme psát obě nerovnosti ostré, tj. $\lfloor -x \rfloor < -x < \lfloor -x \rfloor + 1$. Odtud

$$-\lfloor -x \rfloor - 1 < x < -\lfloor -x \rfloor,$$

a stačí tedy položit $\lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor - 1$ a požadované nerovnosti jsou splněny (a $\lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$). Tím jsme probrali všechny možné případy a důkaz bodu (iii) je tím dokončen.

(iv): Nechť $x < y$ jsou libovolná reálná čísla; chceme najít $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$. Podle bodu (ii) existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n} < y - x, \quad \text{neboli} \quad xn + 1 < yn.$$

Podle (iii) existuje celá část $\lfloor xn \rfloor$ součinu xn, která splňuje nerovnosti

$$\lfloor xn \rfloor \leqslant xn < \lfloor xn \rfloor + 1, \quad \text{odkud plyne} \quad xn < \lfloor xn \rfloor + 1 \leqslant xn + 1 < yn.$$

Takto jsme našli celé číslo $\lfloor xn \rfloor + 1$, které splňuje $xn < \lfloor xn \rfloor + 1 < yn$. Položíme-li $q = \frac{\lfloor xn \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q}$, dostaneme $x < q < y$, a jsme hotovi. □

Tvrzení. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená a nechť $H = \{h \in \mathbb{R} : h$ je horní závora $M\}$. Pak $H = [\sup M, \infty)$. Množina H všech horních závor M má tedy minimum a jím je* $\sup M$.

Poznámka. Toto tvrzení nás opravňuje supremum nazývat *nejmenší horní závorou*. Podobně platí, že infimum je *největší dolní závora*.

Tvrzení. *Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$. Pak platí:*

(i) *číslo $h \in \mathbb{R}$ je horní závora $A \Leftrightarrow -h$ je dolní závora $-A$;*

(ii) *A je shora omezená $\Leftrightarrow -A$ je zdola omezená;*

(iii) $\inf(-A) = -\sup A$;

(iv) *A je omezená $\Leftrightarrow$ existuje $K > 0$ takové, že $A \subseteq [-K, K]$.*

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduché cvičení na použité pojmy horní a dolní závory, suprema, infima a různých variant omezenosti. Poznamenejme pouze, že tvrzení (iv) hovoří o *omezenosti*, tedy omezenosti shora a zdola zároveň.

Poznámka. Připomeňme si ještě několik pojmů a faktů souvisejících s reálnými čísly.

- *Absolutní hodnota* čísla $x \in \mathbb{R}$ je definována jako $|x| = \begin{cases} x, & \text{jestliže } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$
  Připomeňme, že absolutní hodnota splňuje $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ (*trojúhelníková nerovnost*), $|ab| = |a| \cdot |b|$ a rovněž $|-a| = |a|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Výraz tvaru $|a - b|$ můžeme geometricky interpretovat jakožto vzdálenost bodů a a b na reálné přímce (to dává dobrý smysl i díky tomu, že takto definovaná „vzdálenost" nemůže být záporná a také nezáleží na pořadí, tj. $|a - b| = |b - a|$).

- Podle Věty o Archimédově axiomu (bod (iii)) pro libovolné reálné číslo $x = x_0{,}x_1x_2\ldots$ existuje právě jedno celé číslo $\lfloor x \rfloor$ takové, že $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$; celé číslo $\lfloor x \rfloor$ nazýváme *dolní celá část x*. Je dobré si uvědomit, že platí
  $$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} x_0, & \text{jestliže } x \in [0, \infty) \cup \mathbb{Z}, \\ x_0 - 1, & \text{jestliže } x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$
  Jde tedy o největší celé číslo $\lfloor x \rfloor$ takové, že $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.

- *Horní celá část* $\lceil x \rceil$ se definuje obdobně a jde o jediné celé číslo splňující $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$, tj. (jinak řečeno) o nejmenší celé číslo splňující $\lceil x \rceil \geqslant x$.

- Celkem tedy pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ máme $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil$, přičemž dolní i horní celá část jsou celá čísla a rozdíl mezi nimi není větší než 1.

Tvrzení. *Nechť $x \geqslant 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje číslo $y \in \mathbb{R}$ takové, že*
$$y^n = x, \tag{1.5}$$
které značíme $\sqrt[n]{x}$ a nazýváme n-tá odmocnina *čísla x; pro $n = 2$ píšeme pouze $\sqrt{x}$ a pro lichá čísla n definujeme n-tou odmocninu i ze záporných čísel x jako $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.*

Existenci odmocniny (tedy existenci řešení rovnice (1.5)) bychom měli dokázat (důkaz ale vynecháme), a to nutně s pomocí Věty o supremu, která, jak víme, odlišuje reálná čísla od čísel racionálních, ve kterých odmocnina existovat nemusí ($2 \in \mathbb{Q}$ ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Náznak důkazu. Pokud $x = 0$, stačí vzít $y = 0$, takže předpokládejme $x > 0$ a definujme množinu $A := \{r \in \mathbb{R} : r^n < x\}$. Je snadné ověřit, že tato množina je shora omezená, takže má (podle příslušné věty) konečné supremum; označme $y = \sup A \in \mathbb{R}$. Nyní je potřeba dokázat, že $y^n = x$. Přesný důkaz vynechám a zde pouze naznačím, že je možno postupovat sporem, a to tak, že jak předpoklad $y^n > x$, tak i přepoklad $y^n < x$ přivedu ke sporu.

Tvrzení lze také dokázat jako důsledek Bolzanovy věty (Věta 3.13) a skutečnosti, že inverzní funkce k x^n je spojitá (podle Věty 3.17). □

1.3.5 Rozšířená definice suprema a infima

Všimněme si, že důležitá Věta o supremu má ve svých předpokladech kromě neprázdnosti také předpoklad omezenosti shora: každá taková množina má supremum. Supremem se v této situaci myslí nějaké konkrétní reálné číslo, které je nejmenší horní závorou naší množiny.

V matematické praxi je ale potřeba pracovat také s množinami neomezenými. Je jasné, že množina, která není shora omezená, nemá supremum ve výše uvedeném smyslu, protože supremum je horní závora a shora neomezená množina (z definice) horní závoru nemá. Abychom však nemuseli jednou provždy pečlivě rozlišovat mezi dvěma případy, totiž omezenými a neomezenými množinami, hodí se definovat „nekonečné supremum a infimum“.

Definice. Pokud $M \subseteq \mathbb{R}$ je množina, která není shora omezená, definujeme její supremum jako

$$\sup M = \infty. \tag{1.6}$$

Podobně, pokud M není zdola omezená, definujeme její infimum jako

$$\inf M = -\infty. \tag{1.7}$$

Symboly ∞ (pro nás totéž co $+\infty$) a $-\infty$ zatím ponecháme bez interpretace, i když pro ně máme jména *(plus) nekonečno* a *minus nekonečno*. Rovnice (1.6) (resp. (1.7)) jsou tedy pro nás pouze jiné způsoby jak vyjádřit, že množina M je shora (resp. zdola) neomezená.

Kromě těchto pojmů dále definujeme

$$\sup \emptyset = -\infty \quad \text{a} \quad \inf \emptyset = \infty.$$

Všimněte si, že tato definice dává smysl: jakékoliv číslo je totiž horní závorou prázdné množiny $\emptyset$. Intuitivně tedy dává smysl definovat *nejmenší* horní závoru (tj. supremum) jako $-\infty$. Podobná úvaha vysvětluje, proč největší dolní závora $\emptyset$ je ∞.

S výše uvedenou definicí můžeme nyní vyslovit Větu o supremu v nejjednodušší verzi:

Věta (O supremu)**.** *Každá podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum i infimum.*

Kapitola 2

Nekonečná číselná posloupnost

2.1 Základní definice a věty

Definice. Posloupností reálných čísel rozumíme jakoukoliv funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Funkční hodnoty f obvykle zapisujeme a_n místo $f(n)$ a hovoříme o n-tém členu posloupnosti místo o hodnotě v bodě n. Celou posloupnost pak označujeme symbolem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (případně jen $\{a_n\}$) místo f.

Chceme-li zdůraznit, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má členy v $\mathbb{R}$ (resp. v nějaké množině $A \subseteq \mathbb{R}$), píšeme někdy poněkud nepřesně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ (resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$).

Definice. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

- *shora omezená*, pokud $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant K$;
- *zdola omezená*, pokud $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant K$;
- *omezená*, pokud je zároveň shora i zdola omezená;
- *neklesající* (resp. *rostoucí*), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geqslant a_n$ (resp. $a_{n+1} > a_n$);
- *nerostoucí* (resp. *klesající*), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leqslant a_n$ (resp. $a_{n+1} < a_n$);

Dále také říkáme, že posloupnost je *monotónní*, pokud je buďto neklesající nebo nerostoucí a říkáme, že je *ryze monotónní*, pokud je buďto rostoucí nebo klesající. (Každá ryze monotónní posloupnost je tedy monotónní, ale ne naopak.) Posloupnost je *konstantní*, pokud jsou všechny její členy stejné (ekvivalentně: pokud je současně nerostoucí a neklesající).

Poznámka. Existují různé způsoby, jak zadat nějakou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Nejjednodušší a pro nás nejčastější způsob zadání je přímým předpisem pro n-tý člen; tedy vlastně vzorečkem v němž figuruje jediná proměnná n. Například $a_n = n^2$.
- Posloupnost lze zadat také *rekurentně*. To znamená, že máme zadán způsob, jakým každý člen spočítat z (některých) členů předchozích. Pak je ovšem potřeba někde začít, a proto součástí zadání musí být jeden nebo více prvních členů, ze kterých je pak už možné začít počítat členy následující.

Příklad. *Aritmetická posloupnost* je jakákoliv posloupnost $\{a_n\}$ pro kterou existuje nějaká konstanta $d \in \mathbb{R}$ (zvaná *diference*) taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$ (tedy každý člen je o d větší než jeho bezprostřední předchůdce). Toto je vlastně rekurentní způsob zadání takové posloupnosti, známe-li její první člen a_1. (Pak máme $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ atd. Z toho je taky vidět, že zadání této posloupnosti předpisem pro n-tý člen vypadá takto: $a_n = a_1 + (n-1)d$.) Všimněte si, že aritmetická posloupnost je vždy monotónní (a je ryze monotónní, kdykoliv $d \neq 0$).

Podobně lze definovat i *geometrickou posloupnost*: Musí existovat nějaké $q \in \mathbb{R}$ (zvané *kvocient*) takové, že $a_{n+1} = q \cdot a_n$. Přímý vzorec pro n-tý člen pak je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Geometrická posloupnost je monotónní, kdykoliv $q \geqslant 0$ nebo $a_1 = 0$ (v tomto druhém případě je ovšem nulová). Pokud $q < 0$ a $a_1 \neq 0$, posloupnost monotónní není.

Příkladem rekurentního zadání posloupnosti, při kterém následující člen vypočítáváme z více než jednoho členu předcházejícího, je třeba Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ (její členy se často značí F_n místo obvyklejšího a_n, b_n apod.):

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{a} \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pro } n \geqslant 2.$$

Tento známý příklad má jednoduché rekurentní zadání a je snadné s jeho pomocí vygenerovat prvních několik členů této posloupnosti – jednoduše vždy sečteme dvě posledně napsaná čísla a napíšeme výsledek: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Pokud by mě však zajímala hodnota miliontého členu této posloupnosti $F_{1\,000\,000}$, musel bych nejprve vypočítat prvních 999 999 členů a teprve pak bych mohl obdržet kýžený výsledek jakožto součet $F_{1\,000\,000} = F_{999\,998} + F_{999\,999}$. Jistě by bylo efektivnější znát přímý předpis pro n-tý člen a rovnou do něj dosadit $n = 1\,000\,000$. Takový vzorec existuje a vypadá následovně:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Platnost tohoto vzorce není těžké dokázat matematickou indukcí (můžete si to zkusit jako cvičení), je ale o poznání obtížnější na něj přijít (odvodit ho); na něco takového zatím nejsme vyzbrojeni dostatečně hlubokou teorií. Všimněte si pro zajímavost, že i přes hojný výskyt iracionálního čísla $\sqrt{5}$ tento vzorec dá po dosazení libovolného $n \in \mathbb{N}$ vždy celé číslo. △

Tvrzení 2.1. *Pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená;*

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leqslant K$;

(iii) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| < K$;

(iv) Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *je omezená (všimněte si, že uvedená množina je oborem hodnot posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*).*

Důkaz. Stačí ukázat implikace (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i). □

Následuje pro tuto kapitolu klíčová definice:

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a píšeme $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

Posloupnost, pro kterou existuje limita, se nazývá *konvergentní*; v opačném případě hovoříme o *divergentní* posloupnosti.

Poznámka. Představa pojící se s tvrzením $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ je, že když proměnná n „probíhá“ postupně všechny hodnoty $1, 2, 3, \ldots$, potom se čísla a_n „blíží k číslu A“, které se nazve limitou té posloupnosti. Nebo též: „Členy posloupnosti se s rostoucím n neomezeně blíží číslu A.“ Představa v naší hlavě tedy může být „pohyblivá“ v tom smyslu, že do grafu postupně zakreslujeme další a další členy naší posloupnosti a tyto členy se blíží k oné hladině A. Genialita definice limity spočívá v tom, že intuitivní představu tohoto „pohyblivého procesu“ (jak n ubíhá do nekonečna, tak se a_n blíží k A) zachycuje „staticky“. Definice vlastně říká: Dostanu-li (jakkoliv malou vzdálenost) $\varepsilon > 0$, dovedu udat (dostatečně velké) $n_0 \in \mathbb{N}$ od nějž počínaje se posloupnost navždy drží blíže než ε u čísla A. Dostanu-li pak ještě mnohem menší kladné ε mohu zase najít (možná ještě mnohem větší) n_0 takové, že od něj dál se posloupnost od A nevzdálí ani o toto menší ε.

Příklad 2.2. Dokážeme z definice, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Nechť je tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle Archimédova axiomu (A) existuje nějaké přirozené číslo $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$; pro něj platí, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Nechť je nyní dáno libovolné přirozené číslo $n \geqslant n_0$. Dostaneme

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

čímž jsme ověřili podmínku požadovanou v definici limity pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $A = 0$, a důkaz je tedy hotov.

Podívejme se ještě na jednu posloupnost: $a_n = (-1)^n$. Je patrné, že pro sudá n jest $a_n = 1$ a pro lichá n jest $a_n = -1$. Zapsána člen po členu vypadá posloupnost $\{a_n\}$ takto: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. Intuice nám napovídá, že tato posloupnost nemá limitu, neboť se zjevně k žádnému číslu neblíží. Dokažte toto tvrzení, tedy negaci výroku $\exists A \in \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$. Zapsaný výrok si nejprve rozepište podle definice, pak ho negujte a výslednou negaci dokažte. △

Věta 2.3. *Každá posloupnost má nejvýše jednu vlastní limitu.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dvěma různými limitami a a b (tedy $a_n \to a$ a zároveň $a_n \to b$). Položme $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$; to je jistě kladné číslo, protože $a \neq b$. Podle definice toho, že $a_n \to a$ a $a_n \to b$ tedy existují čísla $n_1 \in \mathbb{N}$ a $n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \geqslant n_1\colon |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{a zároveň } \forall n \geqslant n_2\colon |a_n - b| < \varepsilon.$$

Položme nyní $n = \max\{n_1, n_2\}$; z trojúhelníkové nerovnosti a výroků uvedených výše dostáváme, že

$$|a - b| = |a - a_n - (b - a_n)| \leqslant |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|,$$

což je spor (dostali jsme totiž $|a - b| < |a - b|$) a důkaz je tedy hotov. □

Věta 2.4. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Mějme nějakou konvergentní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označme a její limitu, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Definice tohoto faktu nám říká, že zvolíme-li $\varepsilon = 1$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že kdykoliv $n \geqslant n_0$, potom $|a_n - a| < \varepsilon = 1$. Pro $n \geqslant n_0$ tedy dostaneme (použitím trojúhelníkové nerovnosti):

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leqslant |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a|. \tag{2.1}$$

Položme $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$ a nechť je dáno libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \geqslant n_0$, pak podle (2.1) máme, že $|a_n| \leqslant |a| + 1 \leqslant K$. Pokud $n < n_0$, plyne nerovnost $|a_n| \leqslant K$ přímo z definice čísla K. Rozlišením těchto dvou případů jsme tedy dostali, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| \leqslant K$, tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. □

Příklad. Poslední věta říká, že platí výrok

$$\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \text{existuje limita } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená.}$$

Tedy platí jedna implikace. Opačná implikace ale obecně neplatí – čímž máme na mysli, že existuje aspoň jedna posloupnost („protipříklad“), pro niž obrácená implikace selže. Tedy

$$\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \text{existuje limita } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\Leftarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená,}$$

což znamená

$$\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená } \wedge \ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ nemá limitu.}$$

Dokázat tento existenční výrok je snadné. Stačí prostě udat aspoň jeden konkrétní příklad takové posloupnosti. K tomu nám postačí třeba posloupnost $a_n = (-1)^n$; ta je zjevně omezená a výše jsme už konstatovali, že nemá limitu (zatím byl tento fakt formulován pouze jako cvičení na definici, brzy však budeme mít k dispozici větu, ze které neexistence limity této posloupnosti plyne triviálně – a předvedeme si to). $\triangle$

Lemma 2.5 („Na prvních několika členech nezáleží.“)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti takové, že* $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 : a_n = b_n$*. Potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$*, má-li jedna strana smysl.*

Poznámka. Podmínka „má-li jedna strana smysl“ znamená, že pokud jedna z obou limit existuje, existuje i ta druhá a nastává rovnost. Pokud jedna z obou limit neexistuje, neexistuje ani ta druhá (jinak by ta první musela existovat).

Neformálně řečeno nám Lemma 2.5 říká, že limita posloupnosti nezávisí na prvních konečně mnoha členech, neboť pokud jsou dvě posloupnosti od jistého indexu shodné, mají buďto stejnou limitu, nebo ani jedna z nich limitu nemá.

Důkaz Lemma 2.5. Předpokládejme, že existuje $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; naším cílem je dokázat, že za daných předpokladů existuje i limita $\lim_{n\to\infty} b_n$ a je rovna a. Nechť je tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$; hledáme nyní příslušné n_0. Z definice rovnosti $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ plyne existence nějakého $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že pro všechna $n \geqslant n_2$ jest $|a_n - a| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro každé $n \geqslant n_0$ dostaneme

$$|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon,$$

kde první rovnost platí, protože $n \geqslant n_1$ (a tedy $b_n = a_n$) a ona nerovnost plyne z toho, že $n \geqslant n_2$. $\square$

Úmluva (O zobecněných posloupnostech)**.** Protože limita posloupnosti nezávisí na konečně mnoha členech (jak jsme ukázali v Lemmatu 2.5 a osvětlili v poznámce, která po něm následuje), dává dobrý smysl hovořit i o limitě „posloupnosti“ která má konečný počet nedefinovaných členů, tedy o zobrazení $f : \mathbb{N} \setminus K \to \mathbb{R}$, kde K je nějaká konečná množina přirozených čísel. Takové zobrazení se někdy formálně nazývá *zobecněná posloupnost*, my však nebudeme mezi posloupností a zobecněnou posloupností rozlišovat.

Podle této úmluvy se tedy například stává přípustnou posloupnost

$$a_n = \frac{1}{n-2},$$

jejíž druhý člen není definován (v tomto případě jde o zobrazení $\mathbb{N} \setminus K \to \mathbb{R}$, kde $K = \{2\}$). Až dosud by správná odpověď na otázku, jaká je hodnota $\lim_{n\to\infty} a_n$ byla, že uvažované zobrazení není posloupnost, a tedy symbol $\lim_{n\to\infty} a_n$ není definován. Odteď je správná odpověď

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-2} = 0.$$

Lemma 2.6 (O nulových posloupnostech)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost, $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$*;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

Důkaz. Důkaz provedeme stručně, a to tak, že všechny tři výroky rozepíšeme a jejich ekvivalence se tím stane zřejmou.

(i) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\colon |a_n - a| < \varepsilon$;

(ii) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\colon |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$;

(iii) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\colon ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$.

Jelikož všechny tři výroky začínají stejnou skupinou kvantifikátorů a závěrečné nerovnosti jsou evidentně ekvivalentní, jsou celé výroky ekvivalentní, což jsme měli dokázat. □

Cvičení 2.7. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost. Pak platí implikace

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Opačná implikace však obecně neplatí!

Řešení. Jedna z ekvivalentních formulací trojúhelníkové nerovnosti nám dá

$$0 \leqslant ||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|. \tag{2.2}$$

Předpokládejme tedy, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ (podle Lemmatu 2.6), existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geqslant n_0\colon ||a_n - a| - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$. Podle (2.2) tedy platí $\forall n \geqslant n_0\colon ||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$, a tedy skutečně $|a_n| \to |a|$.

Opačná implikace skutečně obecně neplatí; jako protipříklad stačí vzít posloupnost se členy $a_n = (-1)^n$. (Pak $|a_n| = 1$ pro všechna n, a tedy $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ však není definována, jak jsme si rozmysleli výše.) □

Lemma 2.8 („Nulová · omezená = nulová.“)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Potom $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.*

Důkaz. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, takže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jest $|b_n| < K$. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, můžeme (dosazením kladného čísla $\frac{\varepsilon}{K}$ místo ε do definice této rovnosti) najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ jest $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Tím pádem dostaneme, že pro všechna $n \geqslant n_0$ jest

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

čímž je důkaz dokončen. □

Poznámka. V neformálních názvech Lemmat 2.6 a 2.8 se vyskytuje pojem „nulová posloupnost“. Je snad jasné, že tím nemyslíme *konstantní* nulovou posloupnost (tj. posloupnost samých nul), nýbrž jakoukoliv posloupnost, která má limitu 0.

Lemma 2.9 (O dvou policajtech)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti splňující následující podmínky:*

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$*;*

(b) $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \colon a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Pak je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentní a jest* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Důkaz. Chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} c_n = a$; nechť je tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Předpoklad (a) nám garantuje existenci čísel $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ takových, že platí:

$$\forall n \geqslant n_2 \colon |a_n - a| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall n \geqslant n_3 \colon |b_n - a| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Pak pro libovolné $n \geqslant n_0$ platí

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon,$$

kde porstřední dvě nerovnosti plynou z předpokladu (b) a toho, že $n \geqslant n_1$; tedy $|c_n - a| < \varepsilon$ a důkaz je hotov. □

Věta 2.10 (O aritmetice konečných limit)**.** *Nechť existují vlastní limity* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n$*. Pak platí identity:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$*;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$*;*

(iii) pokud navíc $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Důkaz. (i): Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$; z definice těchto rovností dostaneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \geqslant n_1 \colon |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \forall n \geqslant n_2 \colon |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro každé $n \geqslant n_0$ dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii): Tento bod nebudeme dokazovat přímo z definice, nýbrž použijeme dříve dokázaná tvrzení. Naším cílem je dokázat, že $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. Jednoduchými úpravami a aplikací trojúhelníkové nerovnosti dostaneme následující odhad:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|.$$

Nyní prozkoumáme pravou stranu tohoto odhadu.

- Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a tedy je omezená podle Věty 2.4. Tedy je omezená i posloupnost absolutních hodnot $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$.
- Protože $b_n \to b$, jest podle Lemmatu 2.6 $|b_n - b| \to 0$.

- Tím pádem Lemma 2.8 implikuje $|a_n| \cdot |b_n - b| \to 0$.
- Stejným způsobem (s využitím samozřejmého faktu, že konstantní posloupnost $|b|$ je omezená) dostaneme, že $|b| \cdot |a_n - a| \to 0$.
- Máme tedy, že oba sčítance na pravé straně mají limitu 0. Podle právě dokázaného bodu (i) Věty 2.10 tedy dostáváme, že i limita tohoto součtu je rovna nule takto:

$$\lim_{n\to\infty} (|a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|) \overset{\text{(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot |b_n - b| + \lim_{n\to\infty} |b| \cdot |a_n - a| = 0 + 0 = 0.$$

Máme tedy

$$0 \leqslant |a_n b_n - ab| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \to 0.$$

Nulu na levé straně těchto nerovností můžeme chápat jako konstantní nulovou posloupnost (ta má limitu 0). Máme tedy posloupnost s členy $|a_n b_n - ab|$ sevřenou mezi dvěma posloupnostmi s limitou rovnou 0, a podle Lemmatu 2.9 o dvou policajtech tedy dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n - ab| = 0$, což je podle Lemmatu 2.6 ekvivalentní dokazovanému vztahu $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. Tím je důkaz hotov.

(iii): Nechť $b \neq 0$. Nejprve si všimněme, že nám stačí dokázat rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}. \tag{2.3}$$

S touto znalostí totiž požadovanou rovnost odvodíme s použitím již dokázaného bodu (ii) takto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} \overset{\text{(ii)}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\right) \overset{(2.3)}{=} a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

K dokončení důkazu tedy dokažme rovnici (2.3). Nejprve si vzpomeneme na Cvičení 2.7, z nějž plyne, že $|b_n| \to |b|$ (jelikož předpokládáme $b_n \to b$). Položíme-li tedy $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, můžeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geqslant n_0 \colon \big||b_n| - |b|\big| < \varepsilon$, z čehož ihned dostaneme, že $\forall n \geqslant n_0 \colon |b_n| > |b| - \varepsilon = |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Odtud konečně dostáváme (přechodem k převráceným hodnotám v nerovnosti):

$$\forall n \geqslant n_0 \colon \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

To znamená, že posloupnost $\frac{1}{|b_n|}$ je počínaje n_0-tým členem omezená (a navíc dobře definovaná – nedělíme totiž nulou, nýbrž něčím větším než $\frac{|b|}{2}$). Posloupnost čísel $\frac{1}{|b_n|}$ je tedy omezená celá[1]; je ale možné, že některé členy s indexy v konečné množině $\{1, \dots, n_0 - 1\}$ nejsou definovány (to se stane tehdy, když pro nějaké n v této množině platí $b_n = 0$). Musíme si tedy vzpomenout na naši Úmluvu o zobecněných posloupnostech a konstatovat, že těchto konečně mnoho členů si můžeme dovolit ignorovat.

Nyní konečně jsme vybaveni k závěrečnému argumentu důkazu. Jest

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|}}_{\text{omezená}} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\text{nulová}} \longrightarrow 0.$$

Konvergence k 0 plyne z Lemmatu 2.8; omezenost onoho součinu je jasná, neboť omezenou (jak jsme si rozmysleli výše) posloupnost $\frac{1}{|b_n|}$ násobíme konstantou $\frac{1}{|b|}$. Z Lemmatu 2.6 tedy dostáváme (2.3). □

[1] A to číslem $K = \max\left\{\frac{2}{|b|}, \frac{1}{|b_1|}, \dots, \frac{1}{|b_{n_0-1}|}\right\}$ – viz též důkaz Věty 2.4 pro analogický argument.

2.2 Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^*$ a nevlastní limita

Všechna reálná čísla, jakkoliv obrovská, mají konečnou velikost. Při práci s limitami posloupností (a později i funkcí) se ukazuje praktickým zavést ještě další dvě „čísla", a to $-\infty$ („minus nekonečno") a $+\infty$ („plus nekonečno"; obvykle vynecháváme ono „$+$" a píšeme pouze ∞).

Definice. Množinu reálných čísel obohacenou o symboly ∞ a $-\infty$ značíme $\mathbb{R}^*$; je tedy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Součástí definice jsou následující oddíly o uspořádání a aritmetice na $\mathbb{R}^*$.

Uspořádání: Jak název napovídá, uspořádání na $\mathbb{R}^*$ se rozšíří tímto způsobem:

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ -\infty < x < \infty.$$

Tedy platí, že $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a lze psát i $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$. Z toho je taky jasné, co rozumíme symbolem $(0, \infty]$: je to množina $(0, \infty) \cup \{\infty\}$.

Aritmetika na $\mathbb{R}^*$

Ne všechny operace s $\pm\infty$ je možné definovat tak, aby vzniklá aritmetika byla rozumná. Nejméně jeden případ, ve kterém neexistuje rozumný způsob, jak definovat výsledek určité operace, už ale známe: dělení nulou v $\mathbb{R}$. V $\mathbb{R}^*$ bude nutné vyloučit více případů. Následuje definice těch operací, které se zavést dají.

Operace sčítání i násobení jsou ve všech případech, kdy je definujeme, *komutativní*, tj. nezáleží na pořadí. Napíšeme-li tedy například, že $\infty + 5 = \infty$, automaticky to znamená, že také $5 + \infty = \infty$.

Sčítání a odčítání: V následujícím je $c \in \mathbb{R}$ libovolné číslo.

- $\pm\infty + c = \pm\infty$;
- $-(\infty) = -\infty$;
- $-(-\infty) = \infty$;
- $\infty + \infty = \infty$;
- $-\infty - \infty = -\infty$;

Nedefinujeme: $\infty - \infty$.

Násobení a dělení (a mocnění s celými exponenty): Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou libovolná.

- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$;
- $(-\infty) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$;
- $c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ pro $c > 0$;
- $c \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ pro $c < 0$;
- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$;
- $\frac{\pm\infty}{c} = \frac{1}{c} \cdot (\pm\infty)$ pro $c \neq 0$;
- $\infty^n = \infty$;
- $\infty^{-n} = 0$.

Nedefinujeme: $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 1^∞. Tyto výrazy společně s $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$ a 0^0 jsou tak zvané *neurčité výrazy*.

Poznámka. Zdůrazněme, že $\mathbb{R}^*$ netvoří *těleso* (viz poznámka po první skupině axiomů $\mathbb{R}$). Kromě toho, že operace nejsou dobře definované ve všech případech, například také selhává distributivní zákon (viz zde):

$$\text{Chybný výpočet: } \infty = (2-1) \cdot \infty = 2\infty - \infty = \infty - \infty = \infty - 2\infty = (1-2)\infty = -\infty;$$

podobných nesmyslů jde napsat celou řadu; viz též obsáhlejší poznámku níže. Na čem i nadále trváme, jsou axiomy o vztahu operací a uspořádání na $\mathbb{R}^*$, jakož i asociativita a komutativita rozšířeného sčítání i násobení ve všech případech, kdy má smysl hovořit o výsledku těchto operací (tedy když nedostáváme neurčité výrazy). K $\pm\infty$ však také neexistují inverzní prvky.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do ∞ (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ nebo $a_n \to \infty$), jestliže platí

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $-\infty$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ nebo $a_n \to -\infty$), jestliže platí

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \colon a_n < K.$$

Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n$ je nekonečná (tj. je rovna ∞ nebo $-\infty$), hovoříme o *nevlastní limitě* a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *divergentní* (nikoliv konvergentní, jak se jí říká v případě existence vlastní limity).

Lemma 2.11. *Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do ∞. Potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená a shora neomezená. (Analogické tvrzení platí pro posloupnost divergující do $-\infty$.)*

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená, neboť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geqslant n_0 \colon a_n > 0$, a tedy $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \geqslant \min\{0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$. Pro důkaz neomezenosti shora se stačí podívat na definici *omezenosti* shora: $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leqslant K$. Neomezenost shora tedy znamená negaci tohoto výroku, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \colon a_n > K$. Je zřejmé, že definice nekonečné limity tento výrok implikuje, a posloupnost je tedy neomezená. □

Věta 2.3*. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pokud má posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, má podle Věty 2.3 *jedinou* vlastní limitu. Podle Věty 2.4 je navíc omezená a podle Lemmatu 2.11 tedy nemůže mít nevlastní (nekonečnou) limitu. Pro konvergentní posloupnosti jsme tedy s důkazem hotovi.

Pokud má posloupnost nevlastní limitu, pak podle Lemmatu 2.11 není omezená, a tedy podle Věty 2.4 nemá vlastní limitu. Zbývá tedy objasnit, že žádná posloupnost nemůže mít současně limitu ∞ a $-\infty$. To je jasné opět z Lemmatu 2.11, neboť taková posloupnost by musela být shora neomezená (má totiž limitu ∞) a zároveň shora omezená (má limitu $-\infty$), což není možné. □

Poznámka. Větu 2.3* (stejně jako později větu o jednoznačnosti limity funkce) budeme využívat takřka neustále už v našem systému značení: symbol $\lim_{n\to\infty} a_n$ je jednoznačně určené číslo; kdyby limit mohlo být více různých, nebylo by jasné, kterou z nich máme tímto symbolem na mysli. Jednoznačnost limity obvykle nezmiňujeme, je ale dobré si uvědomit, že implicitně ji využíváme.

Příklad 2.12.

- Dokažme z definice, že $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

  Budiž dáno libovolné $K \in \mathbb{R}$. Podle Archimédova axiomu existuje přirozené číslo n_0, které je větší než K. Je-li nyní dáno jakékoliv $n \geqslant n_0$, platí: $n \geqslant n_0 > K$. Tím je důkaz hotov.

- Uvažujme posloupnost $a_n = (-1)^n \cdot n$. Je snadno vidět, že tato posloupnost není omezená ani shora ani zdola. Podle Věty 2.4 a Lemmatu 2.11 nemá ani vlastní ani nevlastní limitu (a tedy ovšem nemá žádnou limitu). △

Lemma 2.9* (O jednom policajtovi)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující následující podmínky:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;

(b) $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 : a_n \leqslant b_n$.

Potom $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Důkaz. Chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Budiž tedy dáno libovolné číslo $K \in \mathbb{R}$. Podle předpokladu (i) existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_2 : a_n > K.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro libovolné $n \geqslant n_0$ současně platí $b_n \geqslant a_n$ (podle předpokladu (ii), protože $n > n_1$) a $a_n > K$ (protože $n > n_2$). Spojením těchto dvou faktů tedy dostáváme $\forall n \geqslant n_0 : b_n > K$, a jsme hotovi. □

Poznámka (O aritmetice limit)**.** Podívejme se znovu na Větu 2.10. Abychom věděli, že v ní uvedené vzorce platí, musíme nejprve předpokládat, že limity vyskytující se na pravé straně (tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$) existují. Věta nám potom říká dvě věci: (a) limita na levé straně existuje a (b) rovná se straně pravé. Jinými slovy obsahem sdělení není pouze onen vzorec, nýbrž taky to, že limita na levé straně vůbec existuje.

Všimněme si nyní, že třeba Věta 2.10, bod (i) se dá formulovat takto: *Rovnost*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{2.4}$$

platí, má-li její pravá strana smysl.

Skutečně, toto je ekvivalentní (a tedy správná) formulace. Předpoklad existence limit $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$, který je ve Větě 2.10 formulován explicitně, je obsažen v onom „má-li pravá strana smysl“: pravá strana rovnice (2.4) totiž má smysl tehdy a jen tehdy, když existují ony dvě limity (zdůrazněme, že v okamžiku formulace této věty jsme měli definovány pouze *vlastní* (=konečné) limity, takže pokud ony samy existují, jejich součet dává dobrý smysl taky).

Od definice nekonečné limity se můžeme ptát, platí-li takto formulovaná věta, i když začneme brát v úvahu nekonečné limity. Odpověď je kladná, platí totiž:

Věta 2.10*. Každá z následujících rovností platí, má-li příslušná pravá strana smysl:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big) \cdot \big(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\big)$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Částečný důkaz. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Větu máme již dokázanou v případě, že $a, b \in \mathbb{R}$, neboť právě taková je situace ve Větě 2.10. Pro důkaz prvního bodu je tedy potřeba vyšetřit jen následující případy: (1) $a \in \mathbb{R}$, $b = \pm\infty$; (2) $a = \pm\infty$, $b \in \mathbb{R}$; (3) $a = \pm\infty$, $b = \pm\infty$. Je přitom jasné, že případy (1) a (2) projdou s analogickým důkazem a (3) nás zajímá pouze v případě, že a a b mají stejné znaménko, a tedy $a = b$ (pokud ne, nemá pravá strana smysl, protože nemá smysl $\infty - \infty$).

Podívejme se nejprve na případ (1): Předpokládejme, že $b = \infty$ (pokud $b = -\infty$, důkaz je analogický); protože pravá strana rovnice (i) je rovna $a + b = \infty$, naším cílem je dokázat, že $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$. Budiž tedy dáno libovolné číslo $K \in \mathbb{R}$. Podle definice vlastní limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_1 : |a_n - a| < 1, \quad \text{a tedy} \quad \forall n \geqslant n_1 : a_n > a - 1$$

a podle definice existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_2 \colon b_n > K - (a-1).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro všechna $n \geqslant n_0$ dostaneme

$$a_n + b_n > (a-1) + (K - (a-1)) = K.$$

Tím jsme z definice ověřili, že $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ a důkaz tohoto případu je hotov.

Již jsme zmiňovali, že případ (2) je analogický případu (1), a tedy nám zbývá vzorec dokázat v případě (3) – to provedeme už o něco stručněji. Předpokládáme, že $a = b = \infty$ a chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$. Nechť $K \in \mathbb{N}$ je libovolné a najděme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall n \geqslant n_1 \colon a_n > K \quad \text{a zároveň} \quad \forall n \geqslant n_2 \colon b_n > 0.$$

Pak pro libovolné $n \geqslant n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ dostaneme, že $a_n + b_n > K + 0 = K$, a jsme hotovi.

Podobně bychom mohli dokázat i vzorec (ii). Podívejme se ještě na důkaz bodu (iii). □

Poznámka (O souvislosti Věty 2.10* a aritmetiky na $\mathbb{R}^*$)**.** Na tomto místě je vhodné si rozmyslet, proč některé výrazy obsahující ∞ nebo 0 definované jsou a jiné ne. Proč v definici vylučujeme případ $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $0 \cdot \infty$, ale definujeme $\frac{1}{\infty} = 0$? Část odpovědi leží ve zjevné problematičnosti vyloučených výrazů. Například pokud bychom definovali $\frac{\infty}{\infty} = 1$, dostali bychom

$$1 = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2 \cdot \infty}{\infty} = 2 \cdot \frac{\infty}{\infty} = 2 \cdot 1 = 2$$

a úplně stejně ke sporu dojdeme za předpokladu, že $\frac{0}{0} = 1$. Předpoklad $0 \cdot \infty = 1$ vede ke sporu třeba převedením na jeden z předchozích případů, neboť dostaneme

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 1,$$

tedy máme $\frac{\infty}{\infty} = 1$, z čehož jsme odvodili spor výpočtem výše. (Spor jsme mohli dostat též přímo – bez převedení na předchozí případ; zkuste přijít na nějaký takový způsob.) Můžete si všimnout, že ve všech těchto výpočtech vedoucích ke sporu jsme používali pouze definice a asociativitu násobení (viz zde).

Asociativitu sčítání lze využít při odvození sporu z předpokladu $\infty - \infty = 0$:

$$0 = \infty - \infty = (1 + \infty) - \infty = 1 + (\infty - \infty) = 1 + 0 = 1.$$

Trochu obtížnější je zdůvodnit, proč nelze definovat ani $0 \cdot \infty = 0$. Použitím distributivního zákona bychom sice mohli „odvodit“, že

$$\infty - \infty = 1 \cdot \infty - 1 \cdot \infty = (1-1) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 0,$$

tedy $\infty - \infty = 0$, což, jak víme, vede ke sporu; je zde ale podvod v tom, že jsme použili distributivitu (tj. „vytýkání“), s jejímž selháním jsme v $\mathbb{R}^*$ beztak smířeni (viz poznámku pod definicí početních operací v $\mathbb{R}^*$). Ve skutečnosti v některých situacích může definice $0 \cdot \infty = 0$ dávat smysl a být užitečná; v našem kontextu by však přece jen problémy způsobila, a to v souvislosti s výpočtem limit a Větou 2.10*.

Podívejme se tedy, proč $0 \cdot \infty = 0$ není pro nás užitečná definice. Nechť $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti, jejichž limity už známe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Pokud bychom definovali $0 \cdot \infty = 0$ a Věta 2.10* by stále obsahovala pouze formulaci „má-li pravá strana smysl“, dostali bychom

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) \stackrel{?}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} n\right) = 0 \cdot \infty = 0,$$

tedy $1 = 0$, což je spor. Všimněme si, že rovnost označená „**?**“ by v této situaci musela být prohlášena za korektní, neboť pravá strana (tedy $0 \cdot \infty$) od nás dostala smysl (konkrétně hodnotu 0). Pro odstranění tohoto problému bychom museli ve Větě 2.10* explicitně vyloučit případ „$0 \cdot \infty$“, aby si zachovala svou platnost. Mohlo by se na základě tohoto příkladu zdát, že je tedy nutno definovat $0 \cdot \infty = 1$; tuto definici jsme však už ke sporu přivedli i bez limit. Kromě toho můžeme posloupnost $\frac{1}{n}$ nahradit třeba posloupností $\frac{2}{n}$ a pak z analogického výpočtu náhle vyplývá, že by mělo být $0 \cdot \infty = 2$.

Mnohem jednodušší než omezovat formulaci Věty 2.10* je řešení, kterého se budeme držet: $0 \cdot \infty$ nedefinujeme nijak a limity tohoto typu tedy nemůžeme řešit okamžitou aplikací Věty 2.10*; místo toho je nejprve ekvivalentními úpravami převedeme na jiný typ limity. Například limita těsně před otazníkem v nekorektním výpočtu výše „je typu $0 \cdot \infty$" a my ji ekvivalentní úpravou (zkrácením n) převedeme do přívětivějšího tvaru, ve kterém už je její hodnota zřejmá; nesnažíme se ihned aplikovat Větu 2.10*:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Pomocí podobných příkladů lze analogickým způsobem pochopit, proč i všechny ostatní neurčité výrazy jsou „skutečně neurčité", a tedy je necháváme bez definice. Podívejme se třeba na $\frac{\infty}{\infty}$; tomuto výrazu odpovídají posloupnosti tvaru $\frac{a_n}{b_n}$, kde $a_n \to \infty$ a $b_n \to \infty$ (tedy prostě zlomky takové, že čitatel i jmenovatel divergují do nekonečna). Nyní dáme tři různé příklady dvojic takových posloupností, z nichž každá vede na zcela jinou limitu onoho zlomku:

- $a_n = n$, $b_n = n^2$; pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$;
- $a_n = n^2$, $b_n = n$; pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$;
- $a_n = 17n$, $b_n = n$; pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 17$.

Více podobných příkladů najdete na této stránce.

2.3 Další věci o limitách posloupností

2.3.1 Limita a nerovnosti

Věta 2.13. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti mající limitu a nechť existuje přirozené číslo n_0 takové, že $\forall n \geqslant n_0\colon a_n \leqslant b_n$. Pak platí $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Poznámka. Obecně však neplatí implikace $(\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n < b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, tedy analogické tvrzení s ostrými nerovnostmi. Jako protipříklad mohou posloužit posloupnosti $a_n = 0$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Pak sice platí ostrá nerovnost mezi n-tými členy obou posloupností (tj. $a_n < b_n$), limity jsou ale stejné.

Závěr tohoto pozorování tedy je, že i když máme mezi jednotlivými členy posloupností ostrou nerovnost, v závěru Věty 2.13 nelze dostat nic lepšího, než nerovnost neostrou.

Důkaz Věty 2.13. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Tvrzení věty je, že za daných předpokladů platí $a \leqslant b$. Předpokládejme tedy pro spor, že platí opak, tedy nechť $a > b$. Nechť $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$; pak $\varepsilon > 0$ a můžeme tedy podle definice limity najít čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \geqslant n_1\colon |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \forall n \geqslant n_2\colon |b_n - b| < \varepsilon.$$

Položme $N = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Potom pro toto N platí:

$$a_N > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon > b_N,$$

což je ve sporu s předpokladem, že pro všechna $n \geqslant n_0$, a tedy i pro N, jest $a_n \leqslant b_n$. □

Věta 2.14. *Každá monotónní posloupnost má limitu.*
Navíc: Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$; podobně, je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost, potom $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající (pro nerostoucí posloupnost projde důkaz analogicky). Důkaz rozdělíme na dva případy podle toho, jestli je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená nebo neomezená.

Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neomezená, pak musí být neomezená shora: Skutečně, posloupnost je totiž neklesající, takže zdola omezená je, a to konstantou a_1. Tím pádem pro libovolné dané $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > K$. Díky tomu, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, dostáváme $\forall n \geqslant n_0\colon a_n \geqslant a_{n_0} > K$, čímž jsme dokázali, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Zároveň množina hodnot $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ je shora neomezená, její supremum je proto z definice rovno ∞; rovnost tedy platí.

Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, Věta o supremu nám garantuje existenci čísla $s = \sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$; dokážeme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema můžeme najít nějaký prvek množiny $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, který je větší než $s - \varepsilon$; nechť je to třeba prvek a_{n_0}. Máme tedy, že $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Protože posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podle předpokladu neklesající a protože s je horní závora všech jejích členů (podle definice), dostáváme

$$\forall n \geqslant n_0\colon s \geqslant a_n \geqslant a_{n_0} > s - \varepsilon,$$

odkud je zřejmé, že $\forall n \geqslant n_0\colon |a_n - s| < \varepsilon$, a jsme tedy hotovi. □

2.3.2 Vybrané posloupnosti, Cantorův princip a Bolzanova-Weierstrassova věta

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel (indexů). Pak posloupnost $b_n = a_{k_n}$ nazýváme *vybranou posloupností* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Představa za touto definicí je, že z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybereme některé členy (ostatní vyškrtáme) a pak je „sesypeme“, aby v naší nové posloupnosti nebyly „chybějící členy“.

Vybraná posloupnost se také dá interpretovat jako složená funkce. Definičním oborem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina $\mathbb{N}$, vnitřní funkce $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ musí tedy být *do* $\mathbb{N}$, aby složení těchto dvou funkcí mohlo dávat smysl. Kromě toho požadujeme, aby vybrané členy zůstaly v původním pořadí, tj. ona „vnitřní funkce“ (posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$) musí být rostoucí.

Vybrané posloupnosti se často říká též *podposloupnost* a o posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme hovořit jako o posloupnosti indexů.

Věta 2.15. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$. *Pak libovolná vybraná posloupnost z* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má taky limitu rovnou* a.

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že kdykoliv $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel (tj. jde o přípustnou posloupnost „indexů“ z definice vybrané posloupnosti), pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon k_n \geqslant n. \tag{2.5}$$

Tento jednoduchý fakt dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je nerovnost $k_1 \geqslant 1$ jasná prostě z toho, že k_1 je přirozené číslo. Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už víme, že $k_n \geqslant n$ (indukční předpoklad). Posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, takže $k_{n+1} > k_n$. Je to ale posloupnost přirozených čísel, takže musí platit dokonce $k_{n+1} \geqslant k_n + 1$. Tím pádem dostáváme

$$k_{n+1} \geqslant k_n + 1 \overset{\text{I.P.}}{\geqslant} n + 1,$$

což jsme chtěli ukázat, a důkaz indukcí je tedy hotov.

Mějme nyní jakoukoliv posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a libovolnou její vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ určenou rostoucí posloupností přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$. Chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \in \mathbb{R}$; pro případ $a \in \{-\infty, \infty\}$ je důkaz analogický.

Nechť je tedy dáno libovolné číslo $\varepsilon > 0$ (z definice vlastní limity posloupnosti). Protože (podle předpokladu věty) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, musí existovat $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Ukážeme, že toto n_0 funguje stejně i pro posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Skutečně, uvažujme libovolné přirozené číslo $n \geqslant n_0$. Podle (2.5) je $k_n \geqslant n \geqslant n_0$, takže podle (2.6) $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, a jsme hotovi. □

Poznámka. Důkaz na půl stránky se možná zdá složitý, ale pojďme se podívat na obě jeho části. V první části důkazu učiníme triviální pozorování o rostoucí posloupnosti indexů $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, totiž že když v každém z n kroků přičteme aspoň jedničku (posloupnost je rostoucí), tak celkově přičteme aspoň n. Ještě neformálněji, pokud jdu po schodech tak, že v každém kroku vystoupám nejméně o jeden schod (mám dovoleno i víc), pak po n krocích vystoupám nejméně o n schodů (přičemž to bude právě n a ne více jedině tehdy, pokud beru schody vždy po jednom; jakmile v jediném kroku vezmu dva schody místo jednoho, „náskok" (nejméně) jednoho schodu už nikdy neztratím). Jedná se tedy o vskutku triviální pozorování a jeho korektní důkaz je spíše cvičení na formální vyjadřování, než že by obsahoval nějakou zajímavou myšlenku. (Všimněte si pouze toho, jak využíváme faktu, že $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost *přirozených čísel*.)

Podívejme se nyní na druhou část důkazu. V ní se v podstatě jen konstatuje, že pokud je nějaká nerovnost (tj., že „a_n je ε-blízko číslu a") splněna pro všechna $n \geqslant n_0$, pak je splněna i pro všechna příslušná k_n, protože $k_n \geqslant n$.

Příklad. Použitím Věty 2.15 lze snadno dokázat, že posloupnost $a_n = (-1)^n$ nemá limitu; můžeme to udělat třeba sporem – předpokládejme tedy, že $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}^*$. Podle Věty 2.15 musí i každá vybraná posloupnost mít tutéž (jedinou) limitu a. Podívejme se na dvě takové vybrané posloupnosti odpovídající pořadě posloupnostem indexů $k_n = 2n$ a $k_n = 2n - 1$:

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1, n \in \mathbb{N}.$$

Vidíme tedy, že jedna podposloupnost (jsouc konstantní 1) má limitu 1, zatímco druhá podposloupnost má limitu -1. Tedy $a = 1$ a zároveň $a = -1$, což je spor. △

Následující věta popisuje důležitou vlastnost $\mathbb{R}$ – tak zvaný Cantorův princip vložených intervalů. Tento princip se dá společně s Archimedovým axiomem použít jako náhrada Věty o supremu. Hovoří se v něm o nekonečné „posloupnosti uzavřených intervalů". Protože dosud jsme se zabývali pouze posloupnostmi čísel, je snad na místě vysvětlení. Každý uzavřený interval je určen svými mezemi. Posloupnost intervalů tedy můžeme chápat jako posloupnost tvaru $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti v nám již běžném slova smyslu, které navíc splňují $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leqslant b_n$, aby všechny intervaly tvaru $[a_n, b_n]$ měly smysl (dolní mez nesmí být větší než horní).

Věta 2.16 (Cantorův princip)**.** *Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že intervaly $[a_n, b_n]$ splňují*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Potom platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \left[\lim_{n\to\infty} a_n \, , \, \lim_{n\to\infty} b_n\right] \neq \emptyset.$$

Poznámka. Stručná formulace může být následující: *Každá posloupnost neprázdných do sebe zařazených omezených uzavřených intervalů má neprázdný průnik.* Předpoklad „do sebe zařazenosti" (2.7) se dá vyslovit tak, že intervaly $[a_n, b_n]$ tvoří klesající posloupnost (každý další interval je menší) a dá se zapsat také takto:

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots .$$

Je velmi důležité si povšimnout okolnosti, že Cantorův princip hovoří o *uzavřených* intervalech. Pro otevřené intervaly tvrzení neplatí: třeba intervaly tvaru $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ jsou do sebe zařazené (zjevně totiž platí $\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n}\right)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), průnik (označme ho A) všech těchto intervalů je však prázdný, jak se můžeme snadno přesvědčit: Protože A je průnik všech intervalů výše uvedeného tvaru, je samozřejmě podmnožinou prvního z nich, tedy $A \subseteq (0,1)$, a speciálně tedy A může obsahovat pouze kladná čísla. Nechť tedy $a > 0$ je libovolné kladné číslo. Můžeme najít $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že $\frac{1}{n} \leqslant a$, a tedy $a \notin \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Protože $A \subseteq (0, \frac{1}{n})$ (jak plyne z definice A), vidíme, že $a \notin A$. Žádné kladné číslo tedy nemůže být prvkem A, a proto $A = \emptyset$.

Důkaz Cantorova principu. Z předpokladu (2.7) plyne, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a je shora omezená například číslem b_1 (tedy horní mezí prvního intervalu). Tím pádem podle Věty 2.14 existuje limita $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Z analogického důvodu existuje taky limita (nerostoucí omezené) posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$; označme $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 2.13 platí $a \leqslant b$. Dokážeme, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a, b].$$

Skutečně, nechť je $x \in [a, b]$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme:

$$a_n \leqslant \sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\} = a \leqslant x \leqslant b = \inf\{b_m : m \in \mathbb{N}\} \leqslant b_n,$$

a tedy $x \in [a_n, b_n]$ pro všechna n, tj. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Protože $x \in [a, b]$ bylo libovolné, dostáváme, že $[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

I opačná inkluze však platí a my ji dokážeme obměnou implikace. Nechť tedy $x \notin [a, b]$ a dokažme, že $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x < a$ (pokud $x > b$, důkaz projde analogicky). Potom je snadno vidět (protože $\lim_{n\to\infty} a_n = a$), že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x < a_n$, a tedy $x \notin [a_n, b_n]$, odkud $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. □

Věta 2.17 (Bolzanova-Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost má nějakou konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená; náš cíl je najít rostoucí posloupnost indexů $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n}$ existuje. Toho dosáhneme tak zvanou metodou půlení intervalu a následnou aplikací Věty 2.16.

Induktivně (přesněji: rekurzivně) zkonstruujeme rostoucí posloupnost indexů hledané vybrané posloupnosti $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ a potom dokážeme, že příslušná vybraná posloupnost konverguje.

Protože posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, existují čísla c_1 a d_1 taková, že $\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leqslant a_n \leqslant d_1$. Zvolíme $k_1 = 1$; pak tedy $a_{k_1} = a_1 \in [c_1, d_1]$.

Ve druhém kroku interval $[c_1, d_1]$ rozdělíme na dvě poloviny:

$$[c_1, d_1] = \left[c_1, \frac{c_1 + d_1}{2}\right] \cup \left[\frac{c_1 + d_1}{2}, d_1\right].$$

Protože interval $[c_1, d_1]$ obsahuje a_n pro všechna n, (aspoň) jedna z obou polovin obsahuje a_n pro nekonečně mnoho n. Tuto polovinu označíme $[c_2, d_2]$ (pokud to platí pro obě, zvolíme kteroukoliv z nich) a zvolíme libovolný index $k_2 > k_1$ takový, že $a_{k_2} \in [c_2, d_2]$.

Tímto způsobem pokračujeme: V obecném n-tém kroku rozpůlíme interval $[c_{n-1}, d_{n-1}]$ zvolený v kroku předchozím a označíme $[c_n, d_n]$ tu jeho polovinu, která obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom vybereme index $k_n > k_{n-1}$ tak, že $a_{k_n} \in [c_n, d_n]$.

Takto jsme dostali „klesající“ posloupnost intervalů $[c_1, d_1] \supseteq [c_2, d_2] \supseteq [c_3, d_3] \supseteq \dots$ takovou, že délka každého intervalu je rovna polovině délky jeho předchůdce (pochopitelně s výjimkou prvního, který předchůdce nemá). Dále máme posloupnost indexů $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ takových, že $a_{k_n} \in [c_n, d_n]$.

Podle Věty 2.16 existují limity $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ a $d = \lim_{n\to\infty} d_n$ a platí

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n] = [c, d].$$

Protože $d_2 - c_2 = \frac{1}{2}(d_1 - c_1)$, $d_3 - c_3 = \frac{1}{2}(d_2 - c_2) = \frac{1}{4}(d_1 - c_1)$ atd.; obecně $d_n - c_n = \frac{1}{2^{n-1}}(d_1, c_1)$, vidíme, že $\lim_{n\to\infty}(d_n - c_n) = 0$, odkud použitím Věty 2.10 (o aritmetice limit) dostáváme, že $c = d$, a tedy interval $[c, d]$ obsahuje jediný bod c $(= d)$. Jak jsme konstatovali výše, jest pro každé n $a_{k_n} \in [c_n, d_n]$, tedy

$$c_n \leqslant a_{k_n} \leqslant d_n.$$

Použitím Lemmatu 2.9 (o dvou policajtech) dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = c$. Našli jsme tedy konvergentní podposloupnost a důkaz je hotov. □

Poznámka. Právě dokázaná věta neříká nic o jednoznačnosti konvergentních vybraných posloupností. Není obtížné si rozmyslet, že pokud omezená posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní, pak existují nejméně dvě různé limity konvergentních podposloupností. Takovým limitám říkáme *hromadné hodnoty posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Následuje přesná definice.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je *hromadná hodnota* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme $H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$.

Věta 2.18. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost reálných čísel. Pak $H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathbb{R}^*$ má maximum a minimum. (Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora neomezená, bude $\max H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \infty$, a pokud je zdola neomezená, bude $\min H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = -\infty$.)*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost; značíme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right);$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

Hodnota $\liminf_{n\to\infty} a_n$ se nazývá *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; hodnota $\limsup_{n\to\infty} a_n$ se nazývá *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Z definice je jasné, že $H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \left[\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n\right]$.

Věta 2.19. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost. Pak limita $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje právě tehdy, když*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Věta. *Mějme libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí následující vzorce:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\left(\sup_{n\geqslant N} a_n\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\left(\inf_{n\geqslant N} a_n\right)$$

Příklad. Všimli jsme si, že $H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \left[\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n\right]$, nemusí ale nastat rovnost těchto dvou množin. Například posloupnost $a_n = (-1)^n$ má přesně dva různé hromadné body a platí

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1.$$ △

Poznámka. Všimněme si dále, že je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnost, pak podle Věty 2.19 platí

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

takže interval $\left[\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} a_n\right]$ obsahuje jediný bod. Jelikož $H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ je podmnožinou tohoto intervalu (to je vidět z definice), existuje nejvýše jeden hromadný bod naší posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Naše posloupnost je konvergentní, označme tedy $L := \lim_{n\to\infty} a_n$. Protože posloupnost je vybraná posloupnost ze sebe sama (stačí „vybrat“ všechny její prvky), je $L \in H\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$.

Celkem jsme si tedy uvědomili, že pro konvergentní posloupnost je množina hromadných bodů vcelku nezajímavá: obsahuje pouze limitu.

2.3.3 Drobnosti k výpočtům limit

V této části probereme bez důkazů několik základních faktů sloužících ke snazším výpočtům limit.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, kde $e = 2,718281828\ldots$ je *Eulerovo číslo*; tuto rovnost považujeme za definici čísla e;
- Limitní podílové kritérium je následující užitečné tvrzení, které si později dokážeme v silnější verzi: *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*
- Z limitního podílového kritéria je snadné odvodit následující fakta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \text{apod.}$$

- Srovnávací škála.
- Limity na Eulerovo číslo.

Lemma. *Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pak také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$. Řečeno slovy, limita posunuté posloupnosti je stejná.*

Důkaz. Je dobré si nejprve uvědomit, že tvrzení dává dobrý smysl i pro celé číslo $k < 0$; v takovém případě se samozřejmě může stát, že a_{n+k} není definované pro prvních konečně mnoho členů. To nám ovšem vzhledem k úmluvě o zobecněných posloupnostech nevadí. V každém případě je posloupnost $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ definována pro všechny indexy $n \geqslant n_0$ pro jistý počáteční index n_0.

Nyní dokážeme tvrzení. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geqslant n_0\colon\ |a_n - a| < \varepsilon$. Položíme-li $n_1 := n_0 - k$, pak tedy $\forall n \geqslant n_1\colon\ |a_{n+k} - a| < \varepsilon$. Jinými slovy pro posunutou posloupnost stačí příslušně posunout „počáteční index“. $\square$

Kapitola 3

Funkce

3.1 Úvodní poznámky o funkcích a základní definice

Definice (Připomenutí základních pojmů)**.** *Reálnou funkcí* nazýváme jakékoliv zobrazení do $\mathbb{R}$ (zobrazení do $\mathbb{C}$ je komplexní funkce) – nezáleží tedy na povaze definičního oboru, termín „reálná funkce“ se vztahuje pouze k oboru hodnot, který musí být podmnožinou $\mathbb{R}$. Reálná funkce *jedné reálné proměnné* je libovolné zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy $f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{D}_f$ značí definiční obor f (obor hodnot značíme symbolem $\mathbb{H}_f$). Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme o reálné funkci jedné reálné proměnné hovořit prostě jako o *funkci*.

Jsou-li f_1 a f_2 funkce, definujeme jejich součet $f_1 + f_2$ jako funkci popsanou vzorcem $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Podobně definujeme i rozdíl, součin a podíl dvou funkcí.

Složení funkcí f_1 a f_2 je funkce $f_1 \circ f_2$ daná předpisem $(f_1 \circ f_2) = f_1(f_2(x))$, a to na největší množině, na níž tento vzorec dává smysl, tj. pro $x \in \mathbb{D}_{f_1 \circ f_2} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{D}_{f_2} \wedge f_2(x) \in \mathbb{D}_{f_1}\}$.

Připomeňme, že funkce se nazývá *prostá*, pokud pro libovolné body $x, y \in \mathbb{D}_f$ platí implikace $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Funkce $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$ se nazývá *na* B, jestliže $\mathbb{H}_f = B$. (Stejné definice lze samozřejmě zavést i pro jiné typy zobrazení než funkce.) Funkce (nebo zobrazení) $f : A \to B$, která je prostá a zároveň na, se nazývá *bijekce*.

Pokud f je prostá, definujeme k ní *inverzní funkci* f^{-1} v každém bodě $y \in \mathbb{H}_f$ (je tedy $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{H}_f$) vzorcem $f^{-1}(y) = x$, pokud $f(x) = y$. Je-li $A \subseteq \mathbb{D}_f$, definujeme *restrikci* (zúžení) funkce f na množinu A jako $f|_A(x) = f(x)$ pro $x \in A$ (tedy $f|_A$ je na množině A rovna funkci f a jinde není definována, tj. $\mathbb{D}_{f|_A} = A$).

Obraz a vzor množiny: *Obrazem množiny* $M \subseteq \mathbb{D}_f$ při funkci f rozumíme množinu

$$f(M) = \{f(x) : x \in M\}, \tag{3.1}$$

tedy množinu všech funkčních hodnot v bodech množiny M. Například pro funkci $f = \sin$ a $M = [-\pi/6, \pi/2)$ dostaneme

$$\sin([-\pi/6, \pi/2)) = [-1/2, 1).$$

Vzor (libovolné) *množiny* B při funkci f je množina

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{D}_f : f(x) \in B\}, \tag{3.2}$$

neboli množina všech bodů, ve kterých je funkční hodnota prvkem množiny B.

Uvědomte si, že zde je jistá kolize značení: pro prostou funkci f totiž symbolem f^{-1} značíme také příslušnou inverzní funkci. V případě prostoty f tedy symbol f^{-1} může znamenat dvě různé věci; z kontextu je nicméně vždy jasné, co máme zrovna na mysli. Pokud do f^{-1} „dosadíme“ množinu B, tj. píšeme

$f^{-1}(B)$, pak máme na mysli vzor množiny; pokud dosadíme bod $y \in \mathbb{H}_f$ (tj. $y \in \mathbb{D}_{f^{-1}}$), máme na mysli hodnotu inverzní funkce v bodě y (s tím, že to připouštíme pouze pro prostou funkci f).

Ale pozor. V případě, že f je prostá, je zde ještě jeden malý háček s kolizí značení: symbol $f^{-1}(B)$ lze totiž chápat buďto a) jako vzor množiny B při funkci f podle definice (3.2), nebo b) jako obraz množiny B při funkci f^{-1} (která je díky prostotě f dobře definována) podle definice (3.1). Opět zde tedy máme dvě možné interpretace a na rozdíl od předchozího případu už nemáme co dále dosazovat a z kontextu tak rozlišit, která z obou interpretací daného symbolu je ta správná.

Naštěstí však v tomto případě oba vzorce (tedy (3.2) a (3.1)) dávají tentýž výsledek, takže problém opět nemáme. Není těžké si to z definice rozmyslet a já vám to vřele doporučuji jako snadné cvičení.

Definice (Omezená funkce)**.** Funkce $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá *omezená* (resp. *shora omezená*, resp. *zdola omezená*), jestliže $\mathbb{H}_f \subseteq \mathbb{R}$ je omezená množina (resp. shora omezená, resp. zdola omezená). (Připomeňme že množina, a nyní tedy i funkce, je omezená, právě když je omezená shora i zdola.)

Příklad.

- Pokud $\mathbb{D}_f = \mathbb{N}$, jedná se o posloupnost (posloupnost je tedy speciální případ funkce);
- *polynomem* rozumíme libovolnou funkci tvaru $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$;
- libovolný podíl dvou polynomů, tedy funkce tvaru $R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, kde P_1 a P_2 jsou polynomy, se nazývá *racionální funkce*.
- funkce *signum* je definována následujícím předpisem:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x > 0, \\ 0, & \text{pokud } x = 0, \\ -1, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

- Nechť $f_1(x) = \sin x$ a $f_2(x) = x^2$. Rozmyslete si, jaký je rozdíl mezi funkcemi $(f_1 \circ f_2)(x) = \sin(x^2)$ a $(f_2 \circ f_1)(x) = (\sin x)^2$. (Připomeňme, že symbolem $\sin^2 x$ se tradičně myslí $(\sin x)^2$ a i my tuto zkratku budeme využívat.)
- Funkce $f(x) = x^2$ není na svém definičním oboru ($\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$) prostá, a tedy nemá inverzní funkci. Restrikce funkce f na nezáporná čísla $g = f|_{[0,\infty)}$ ale prostá je a platí $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$, přičemž $\mathbb{D}_{g^{-1}} = \mathbb{H}_g = [0, \infty)$. To je skutečně pravda podle definice inverzní funkce – pro $x \in [0, \infty)$ je totiž $\sqrt{y} = x$, kdykoliv $x^2 = y$.
- Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je zdola omezená, ale není shora omezená (a tedy není omezená);
- funkce $f(x) = \sin x$ je omezená shora i zdola, a je tedy omezená;
- funkce $f(x) = \ln x$ není omezená ani shora ani zdola. △

3.2 Limita a spojitost funkce

3.2.1 Definice limity funkce

Definice. Nechť f je nějaká funkce a nechť $c, A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že limita f v bodě c je A (píšeme $\lim_{x\to c} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Poznámka. Z definice je vidět, že limita funkce f v bodě c záleží pouze na hodnotách různých od c, protože implikace v závěru onoho výroku má ve svém předpokladu nerovnost $0 < |x - c|$, tedy $x \neq c$. Jinými slovy: limita v bodě c nezáleží na hodnotě v bodě c, funkce f v tom bodě dokonce ani nemusí být definována.

Na druhou stranu, aby limita funkce f v bodě c mohla existovat, musí být funkce definována ve všech ostatních bodech (tj. s výjimkou samotného bodu c) nějakého „δ-okolí“ bodu c. Tento požadavek je v definici obsažen *implicitně* – tj. není přímo vysloven, je ale zjevně nutnou podmínkou toho, aby definice mohla být splněna. Skutečně tomu tak je: tvrdí se totiž, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x různá od c z δ-okolí bodu c je funkční hodnota $f(x)$ málo vzdálena od A; speciálně tedy funkční hodnota $f(x)$ musí být definována.

Zatím jsme definovali pouze *vlastní* (konečnou) limitu *ve vlastním bodě* (tj. v konečném bodě $c \in \mathbb{R}$). Zbývá definovat nevlastní limitu ve vlastním bodě, vlastní limitu v nevlastním bodě a nevlastní limitu v nevlastním bodě. Abychom nemuseli všechny tyto případy definovat zvlášť, zavedeme nyní užitečné značení, které nám umožní všechny 4 definice (tj. včetně definice výše) vyslovit současně.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. *Okolím bodu c* (s poloměrem δ) nazveme množinu tvaru

$$B(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - c| < \delta\}.$$

Prstencovým okolím bodu c (s poloměrem δ) nazýváme množinu tvaru

$$P(c, \delta) = (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) = (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - c| < \delta\}.$$

Dále definujeme:

$$B(\infty, \delta) = P(\infty, \delta) = \Big(\frac{1}{\delta}, \infty\Big) \quad \text{a také} \quad B(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta) = \Big(-\infty, -\frac{1}{\delta}\Big);$$

nerozlišujeme tedy mezi okolím a prstencovým okolím bodů $\pm\infty$.

Definice. Nechť f je nějaká funkce a nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že limita funkce f v bodě c je A (píšeme $\lim_{x\to c} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Cvičení. Rozmyslete si, že pro $c, A \in \mathbb{R}$ (tedy obě čísla konečná) je tato definice totožná s definicí výše.

Věta 3.1. *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je funkce. Pak f má v c nejvýše jednu limitu.*

Podobně jako dříve u posloupností dává tento výsledek (který si dokážeme později pomocí Heineho věty) opodstatnění našemu značení limity pomocí symbolu $\lim_{x\to c} f(x)$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě c, jestliže platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Poznámka.

- Pokud f je spojitá v bodě c, musí f být definována na nějakém okolí bodu c (tj. $\exists \delta > 0 \colon B(c, \delta) \subseteq \mathbb{D}_f$). Tento fakt je implicitně obsažen v definici, neboť to, že v ní hovoříme o limitě f v bodě c znamená, že f je definována na jistém *prstencovém* okolí bodu c a hovoříme též o hodnotě $f(c)$, a tedy f musí být definována i přímo v c.

- Povšimněte si, že na rozdíl od pojmu limity, spojitost funkce *závisí* na hodnotě v bodě.
- Snadné cvičení je následující fakt: *Funkce f je v bodě c spojitá* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \in B(f(c),\varepsilon).$$

- Stojí také za to si uvědomit, že při našem novém značení lze definice vlastní i nevlastní limity posloupnosti formulovat následujícím jednotným způsobem (kde tedy připouštíme $a \in \mathbb{R}^*$):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\colon a_n \in B(a,\varepsilon).$$

3.2.2 Souvislost limity funkce a limity posloupnosti

Následující klíčová věta nám umožní ušetřit si práci s důkazy některých tvrzení o limitě funkce. Pokud například chceme dokázat, že limita funkce je jednoznačně určena, budeme schopni tento problém převést na studium jednoznačnosti limity posloupnosti – v kontextu posloupností ale řešení známe: limita posloupnosti (pokud existuje) je jen jedna. Heineho věta nám v tomto (a v podobných případech) umožní analogické tvrzení pro funkce získat jednoduše a aniž bychom museli opakovat podobný (ale přece trochu jiný) důkaz z definice limity funkce.

Další typický způsob užití Heineho věty je v opačném směru: při výpočtech některých limit posloupností. Pomocí Heineho věty výpočet převedeme na výpočet limity funkce, který bude mnohdy jednodušší, neboť pro funkce budeme mít k dispozici silnější početní metody.

Věta 3.2 (Heineho věta)**.** *Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky (H1) a (H2)

(H1) $\lim_{n\to\infty} x_n = c$,

(H2) $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq c$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Poznámka. Než přikročíme k důkazu právě uvedené věty, je vhodné si dobře uvědomit její logickou strukturu. Věta říká, že jisté dva výroky jsou navzájem ekvivalentní. Jinými slovy, platí-li v dané situaci výrok (i), platí i výrok (ii) a naopak. Struktura výroku (i) je jasná: Funkce f, bod c i hodnota A jsou předem pevně dány v hlavičce věty a zde ve výroku (i) se pouze tvrdí, že $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

Zajímavější je bod (ii) – ten má tvar implikace: *Jestliže* posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje (H1) a (H2), *potom* platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Zde je důležité si všimnout (ve formulaci implicitně obsaženého) obecného kvantifikátoru ($\forall$). Ještě přesnější formulace by totiž byla následující:

$$\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\colon \text{posloupnost } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ splňuje (H1) a (H2)} \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Toto uvědomění je zásadní pro pochopení Heineho věty. Říká nám, že pokud chceme zjistit něco o limitě *funkce* $\lim_{x\to c} f(x)$ (tj. chceme dokázat implikaci (ii)$\Rightarrow$(i)), nestačí nám do funkce f dosazovat body jediné posloupnosti bodů x_n jdoucí k c (tj. splňující (H1)). Věta od nás požaduje, abychom funkci „testovali“ na *všech* posloupnostech jdoucích k c (které se samotnému bodu c vyhýbají, jak žádá podmínka (H2)).

Důkaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Předpokládejme, že $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a dokažme (ii). Budiž tedy dána libovolná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky (H1) a (H2); chceme z definice limity posloupnosti dokázat, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nechť je tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu, že $\lim_{x\to c} f(x) = A$, můžeme najít $\delta_0 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_0)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon). \tag{3.3}$$

Podle předpokladu (H1) můžeme k tomuto δ_0 (chápanému nyní jako epsilon z definice limity posloupnosti) najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geqslant n_0\colon x_n \in B(c,\delta_0)$; díky podmínce (H2) však z toho ihned vidíme, že dokonce

$$\forall n \geqslant n_0\colon x_n \in P(c,\delta_0).$$

V kombinaci s faktem (3.3) tedy dostáváme, že

$$\forall n \geqslant n_0\colon f(x_n) \in B(A,\varepsilon).$$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Implikaci dokážeme nepřímo, budeme tedy dokazovat $\neg$*(i)* $\Rightarrow$ $\neg$*(ii)*. Předpokládejme $\neg(\lim_{x\to c} f(x) = A)$, tj.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in P(c,\delta)\colon \neg(f(x) \in B(A,\varepsilon)); \tag{3.4}$$

zafixujme si nějaké takové $\varepsilon > 0$. Nyní chceme dokázat $\neg$*(ii)*, což znamená najít posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky (H1) a (H2), pro kterou neplatí závěr $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Takovou posloupnost zkonstruujeme indukcí (přesněji: rekurzí): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme podle (3.4) najít $x_n \in P\left(c,\frac{1}{n}\right)$ (stačí v (3.4) zvolit $\delta = \frac{1}{n}$) takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$. Tímto způsobem jsme tedy dostali posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje podmínky (H1) a (H2), protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsme volili $x_n \in P\left(c,\frac{1}{n}\right)$, a tedy $|x_n - c| < \frac{1}{n}$ (odkud podle Lemmatu o dvou policajtech plyne, že $|x_n - c| \to 0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} x_n = c$) a $x_n \neq c$ (protože jde o *prstencové* okolí).

Na druhou stranu ale neplatí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$, neboť existuje $\varepsilon > 0$ (a sice ono pevně zvolené ε), že dokonce $\forall n \in \mathbb{N}\colon \neg(f(x_n) \in B(A,\varepsilon))$, a tvrzení je tedy zřejmé. Tím je dokázáno, že existuje posloupnost splňující (H1) a (H2) a nikoliv závěr v *(ii)*, a tedy platí $\neg$*(ii)*. □

Věta 3.3 („Heineho definice spojitosti“). *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Pak NVJE:*

(i) Funkce f je spojitá v bodě c.

(ii) Kdykoliv $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, potom $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. Snadná aplikace Věty 3.2 a definice spojitosti. □

Důkaz Věty 3.1 pomocí Heineho věty. Nechť má funkce f v bodě c limitu A. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost splňující pro bod c podmínky (H1) a (H2) z Heineho věty (tj. $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ a $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \neq c$), potom $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (podle Heineho věty). Kdyby funkce f měla v bodě c ještě nějakou jinou limitu B, musela by (opět podle Heineho věty) posloupnost $f(x_n)$ kromě limity A mít i limitu B, což je nemožné podle věty o jednoznačnosti limity posloupnosti. Proto jiná limita funkce f v bodě c existovat nemůže. □

Příklad. Funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu v bodě 0. Skutečně, stačí najít dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující podmínky (H1) a (H2) v Heineho větě a takové, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Kdyby totiž existovala limita $\lim_{x\to 0} f(x) = A$, pak by podle Heineho věty musela být splněna rovnost $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Příklady takových posloupností jsou třeba $x_n = \frac{2}{\pi + 4n\pi}$ a $y_n = \frac{1}{n\pi}$, které obě mají limitu 0 a mají nenulové členy (tj. splňují podmínky (H1) a (H2)) a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x_n) = 1$ a $f(y_n) = 0$, odkud $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, a limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ podle výše uvedené úvahy tedy nemůže existovat.

Heineho věta tedy dává jednoduchý návod, jak dokazovat, že limita nějaké funkce v určitém bodě neexistuje. Stačí najít dvě posloupnosti konvergující k onomu bodu takové, že příslušné hodnoty funkce mají různé limity. Jde o analogický postup, jako když dokazujeme neexistenci limity posloupnosti tak, že najedeme dvě podposloupnosti s různými limitami. △

3.2.3 Metody výpočtu limity funkce

Věta 3.4 (Aritmetika limity funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce. Pak každá z následujících rovností platí, má-li příslušná pravá strana smysl.*

(i) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$*;*

(ii) $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$*;*

(iii) $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)/ \lim_{x\to c} g(x)$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí Heineho věty. Dokážeme bod *(i)*, ostatní důkazy projdou zcela stejným postupem. Předpokládejme, že pravá strana první rovnosti má smysl. To znamená, že existují limity $A = \lim_{x\to c} f(x)$ a $B = \lim_{x\to c} g(x)$ a dají se sečíst (tj. není jedna rovna ∞ a druhá $-\infty$). Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost splňující pro bod c podmínky (H1) a (H2) z Heineho věty, tj. platí $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ a $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq c$. Pak podle Heineho věty platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ a $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Podle věty o aritmetice limit pro posloupnosti tedy platí, že

$$\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) + g(x_n)) \overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A + B.$$

Protože však posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (H1) a (H2) byla zvolena libovolně, platí tato rovnice pro všechny takové posloupnosti, a opětovným použitím Heineho věty (tentokrát opačné implikace) dostáváme, že

$$\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c}(f+g)(x) \overset{\text{Heine}}{=} A + B = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).$$ □

Věta 3.5 (Spojitost a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f a g jsou spojité v bodě c. Potom i funkce $f + g$, $f \cdot g$ jsou v bodě c spojité. Pokud $g(c) \neq 0$, je spojitá i funkce f/g.*

Důkaz. Dokážeme například poslední tvrzení o funkci $\frac{f}{g}$; ostatní lze dokázat analogicky. Nechť jsou tedy funkce f a g spojité v bodě c a $g(c) \neq 0$. Tedy podle definice spojitosti platí, že

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to c} g(x) = g(c).$$

Podle Věty 3.4 dostáváme, že

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \left(\frac{f}{g}\right)(c).$$

Tedy limita funkce $\frac{f}{g}$ v bodě c je rovna její funkční hodnotě v bodě c, a tedy je funkce v tom bodě spojitá. □

Příklad 3.6 (Spojitost polynomu a racionální funkce)**.**

- Nejprve si dokážeme spojitost funkce $f(x) = x$ v každém bodě: Budiž tedy dáno $c \in \mathbb{R}$; chceme dokázat, že $\lim_{x \to c} x = c$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $\delta = \varepsilon$. Nyní je zřejmé, že pro libovolné $x \in P(c, \delta)$ je $f(x) = x \in B(c, \varepsilon)$, protože $P(c, \delta) \subseteq B(c, \varepsilon)$.

- Ještě jednodušší je dokázat, že libovolná konstantní funkce je spojitá ve všech bodech. Pro konstantní funkci můžeme δ zvolit jak chceme (dokonce nezávisle na ε) a vyjde to. Doporučuji si toto podrobně rozmyslet z definice spojitosti a limity.

- Postupnou aplikací předchozích dvou bodů a Věty 3.5 dostaneme, že libovolný polynom je spojitý v každém bodě. Přesněji: Dokážeme to indukcí podle stupně polynomu. Pro stupeň 0 už to víme, neboť jsme učinili pozorování, že konstantní funkce je spojitá. Předpokládejme nyní, že už jsme dokázali, že libovolný polynom stupně nejvýše n (kde $n \geqslant 0$ je celé) je ve všech bodech spojitý. Mějme nyní libovolný polynom P stupně $n + 1$, tedy $P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak $P_1(x) = a_{n+1}x^n + a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1$ je polynom stupně n, a tedy P_1 je spojitá v každém bodě. Podle Věty 3.5 je spojitá i funkce $x \cdot P_1(x)$, a (podle téže věty) tedy i $P(x) = x \cdot P_1(x) + a_0$.

- Libovolná funkce tvaru $R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ (tedy racionální funkce) je podle Věty 3.5 spojitá ve všech bodech svého definičního oboru, tj ve všech bodech $c \in \mathbb{R}$ takových, že $P_2(c) \neq 0$. △

Nyní definujeme intuitivně přirozený pojem jednostranné limity funkce ve vlastním bodě. Třeba funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu, má tam ale, jak uvidíme, (různé) jednostranné limity.

Definice (Jednostranná limita a spojitost)**.** Nejprve zavedeme značení: Je-li $c \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, definujeme

$$P_+(c, \delta) = (c, c + \delta) \quad \text{a} \quad P_-(c, \delta) = (c - \delta, c).$$

Limita funkce f v bodě c *zprava* je definována stejně jako *oboustranná* limita, pouze symbol $P(c, \delta)$ nahradíme symbolem $P_+(c, \delta)$. Přesněji:

Pro $A \in \mathbb{R}^*$ (pozor, zde $c \in \mathbb{R}$) řekneme, že limita funkce f v bodě c *zprava* je rovna A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Píšeme pak $\lim_{x \to c_+} f(x) = A$. Analogicky definujeme *limitu zleva* a píšeme $\lim_{x \to c_-} f(x) = A$.

Řekneme, že funkce f je v bodě c *spojitá zprava* (resp. *spojitá zleva*), jestliže platí

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to c_-} f(x) = f(c)).$$

Lemma 3.7. *Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Potom*

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = A \wedge \lim_{x \to c_+} f(x) = A.$$

Dále platí, že f je v bodě c spojitá, kdykoliv je v bodě c spojitá zleva i zprava.

Důkaz. Jde o trivialitu. Stačí si přečíst definice a využít zjevného faktu, že $P(x, \delta) = P_-(x, \delta) \cup P_+(x, \delta)$. Tvrzení o spojitosti je okamžitým důsledkem tvrzení o limitách a definice spojitosti. □

Poznámka. Jak je zřejmé z definice, jednostranná limita v bodě c závisí pouze na hodnotách funkce na příslušné straně od bodu c. Ze stejného důvodu jako pro dříve definovanou oboustrannou limitu nezávisí na hodnotě (nebo existenci hodnoty) přímo v bodě c.

Všechny dosud uvedené věty o (oboustranné) limitě funkce platí i s příslušnými „jednostrannými formulacemi“. Například platí, že limita zprava dané funkce v daném bodě je jednoznačně určena (pokud existuje). Stejně tak platí Věta 3.4, nahradíme-li v ní každý symbol $\lim_{x \to c}$ symbolem $\lim_{x \to c_+}$ (a podobně i zleva). Trochu komplikovanější by byla jednostranná modifikace Heineho věty. Například verze zprava by vypadala následovně (volím poněkud stručnější formulaci):

Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Pak NVJE:

(i) $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$.

(ii) Pro každou klesající $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *takovou, že* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Příklad. Pro funkci $\operatorname{sgn} x$, jak se snadno nahlédne, platí

$$\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Podle Lemmatu 3.7 tedy neexistuje $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$. Kromě toho (podle téhož lemmatu) funkce $\operatorname{sgn} x$ není v bodě nula spojitá ani zleva ani zprava, neboť $\operatorname{sgn} 0 = 0$, což se nerovná ani limitě zleva ani limitě zprava. △

Věta 3.8 (Limita složené funkce)**.** *Nechť f, g jsou funkce, $c, B, A \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme dále, že platí podmínky*

(i) $\lim_{x\to c} g(x) = B$ *a* $\lim_{y\to B} f(y) = A$*;*

(P) $\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in P(c, \delta_1)\colon g(x) \neq B$.

Potom platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$ $(= \lim_{y\to B} f(y))$.

Důkaz. Nechť jsou splněny všechny předpoklady věty; chceme dokázat $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{y\to B} f(y) = A$, můžeme podle definice limity najít $\eta > 0$ (které hraje roli čísla „delta“ pro vnější funkci) takové, že

$$\forall y \in P(B, \eta)\colon f(y) \in B(A, \varepsilon). \tag{3.5}$$

Toto číslo η nyní chápeme jako „epsilon“ pro vnitřní funkci. Podle definice faktu, že $\lim_{x\to c} g(x) = B$, můžeme najít $\delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2)\colon g(x) \in B(B, \eta). \tag{3.6}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (kde číslo δ_1 pochází z podmínky (ii); tvrdíme nyní, že k onomu ε jde o vhodnou volbu δ z definice dokazovaného faktu, že $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$, tj. chceme dokázat, že

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(g(x)) \in B(A, \varepsilon).$$

Budiž tedy dáno libovolné $x \in P(c, \delta)$. Protože $\delta \leqslant \delta_2$, jest podle (3.6) $g(x) \in B(B, \eta)$. Navíc ale máme $\delta \leqslant \delta_1$, a tedy podle podmínky (ii) víme, že $g(x) \neq B$, odkud celkem dostáváme, že $g(x) \in B(B, \eta) \setminus \{B\} = P(B, \eta)$. Tím pádem ale podle (3.5) platí, že $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$, a jsme hotovi. □

Věta 3.9 (Limita složené funkce se spojitou vnější funkcí)**.** *Buďte f, g funkce, $B \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále platí podmínky*

(i) $\lim_{x\to c} g(x) = B$*;*

(S) funkce f je v bodě B spojitá.

Potom platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(B)$.

Důsledek. *Nechť je funkce g spojitá v bodě c a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$. Potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.*

Pro věty 3.8 a 3.9 platí také různé „jednostranné verze“. Přitom ona jednostrannost se může týkat jak funkce vnější, tak funkce vnitřní. V prvním případě můžeme například dokázat následující tvrzení:

Nechť je (vnitřní) funkce g spojitá v bodě c a na jistém okolí bodu c platí $g(x) \geqslant g(c)$. Nechť je (vnější) funkce f zprava spojitá v bodě $g(c)$. Potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.

Pro (pouze) zprava spojitou vnitřní funkci bychom zase mohli formulovat takovouto větu:

Nechť je (vnitřní) funkce g zprava spojitá v bodě c a (vnější) funkce f spojitá v bodě $g(c)$. Potom $f \circ g$ je zprava spojitá v bodě c.

Celkově tedy můžeme učinit závěr, že *je-li f spojitá na $\mathbb{D}_f$ a g spojitá na $\mathbb{D}_g$, potom $f \circ g$ je spojitá na $\mathbb{D}_{f \circ g}$*, tedy, jak jsme zvyklí říkat, *složení spojitých funkcí je spojitá funkce*.

Poznámka. Pojďme se podívat na příklad, který ilustruje, proč je Větě 3.8 potřeba podmínka (P) – ukážeme tedy složenou funkci, která splňuje předpoklady věty až na (P) a závěr věty pro ni selže.

Položme $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Podle Lemmatu 3.12 („nulová · omezená = nulová“) je $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Všimněme si rovnou, že takto definovaná funkce g, která v našem příkladě sehraje roli vnitřní funkce, nesplňuje podmínku (P), tj. platí její negace:

$$\neg(\exists \delta_1 > 0\ \forall x \in P(0,\delta_1) \colon g(x) \neq 0),$$

což je ekvivalentní výroku

$$\forall \delta_1 > 0\ \exists x \in P(0,\delta_1) \colon g(x) = 0. \tag{3.7}$$

Skutečně, tento výrok je pravdivý, neboť $g(x) = 0$ (tedy funkce je rovna svojí limitě) ve všech bodech x tvaru $x = \frac{1}{n\pi}$, které lze najít libovolně blízko nule, tj. v libovolném prstencovém okolí nuly, přesně jak říká výrok výše.

Vezměme si nyní nějakou (vnější) funkci $f(y)$, pro kterou nelze aplikovat Větu 3.9, ve které není potřeba podmínka (P) – tedy takovou funkci, která nesplňuje podmínku (S), tj. spojitost v bodě, ke kterému konverguje vnitřní funkce g (v našem případě tedy 0). Příkladem takové funkce je třeba $f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$, která v bodě $y = 0$ není ani definovaná (a tedy tam nemůže být spojitá). Sepišme si tedy, co máme:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{y\to 0} f(y) = 1.$$

Mohli bychom tedy chtít učinit **nepravdivý** závěr, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2 \sin\frac{1}{x}} - 1}{x^2 \sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{y\to 0} f(y) = 1.$$

Ve skutečnosti totiž limita $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ neexistuje. To proto, že podle (3.7) existuje v libovolném prstencovém okolí bodu 0 bod x, ve kterém $g(x) = 0$, a tedy $f(g(x))$ nemá smysl (protože f není v nule definována). Jinak řečeno, funkce $f \circ g$ není definována na žádném prstencovém okolí bodu 0, a tedy v tomto bodě nemá limitu (viz Poznámku 3.2.1). Jinak řečeno, limita $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ vůbec neexistuje, a tedy není rovna jedné.

3.2.4 Limita a nerovnosti, lokální chování funkcí

Lemma 3.10 (Limita a nerovnosti)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce.*

(i) Pokud $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$*, pak* $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta) \colon f(x) > g(x)$.

(ii) Pokud $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta) \colon f(x) \leqslant g(x)$ *a ony limity existují, pak* $\lim_{x\to c} f(x) \leqslant \lim_{x\to c} g(x)$.

Lemma 3.11 (Policajti pro funkce)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g, h jsou funkce.*

(i) Nechť $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta) \colon f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *a nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$. *Pak* $\lim_{x\to c} h(x) = A$.

(ii) Nechť $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta) \colon f(x) \leqslant h(x)$ *a nechť* $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. *Pak* $\lim_{x\to c} h(x) = \infty$.

První bod lemmatu je tedy analogií Lemmatu o dvou policajtech pro posloupnosti. Tam předpokládáme, že ony nerovnosti platí od jistého počátečního indexu. Zde (pro funkce) máme místo toho předpoklad, že tyto nerovnosti platí na jistém okolí bodu, v němž uvažujeme limitu. Druhé tvrzení je „Lemma o jednom policajtovi“ pro funkce, analogické Lemmatu 2.9*. Je snad jasné, že analogické tvrzení lze zformulovat i pro limitu $-\infty$.

Poznámka. Limita v bodě vypovídá něco o chování funkce „lokálně na jistých prstencových okolích onoho bodu“. Je například jasné, že když studuji limitu funkce f v bodě c a rozhodnu se předefinovat hodnotu $f(x)$ v nějakém bodě x na hodnotu jinou, na limitu v bodě c to nemá vliv. Skutečně je to tak: pokud $x = c$, s limitou se nic nestane, jak už víme dávno. Na druhou stranu, pokud $x \neq c$, pak je vzdálenost od x od c pevné kladné číslo, a tedy to rovněž nemá vliv; jako cvičení si můžete zkusit dokázat toto jednoduché tvrzení (můžete to dokázat snadno z definice, nebo i jednoduchou aplikací Lemmatu 3.10):

Nechť se funkce f a g shodují na nějakém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ (tj. $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) = g(x)$), pak $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$, má-li jedna strana smysl.

Z existence *vlastní* limity v bodě také plyne *lokální omezenost* funkce. Přesněji:
Nechť $\lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}$. Pak je funkce f na nějakém prstencovém okolí bodu c omezená.
Toto také plyne z Lemmatu 3.10 (zkuste si rozmyslet jak).

Dále platí například lokální zachovávání znaménka (rovněž aplikace Lemmatu 3.10):
Nechť $\lim_{x\to c} f(x) > 0$. Pak je f na jistém prstencovém okolí bodu c kladná.

Lemma 3.12 („Nulová · omezená = nulová.“)**.** *Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť g je na nějakém prstencovém okolí bodu c omezená. Pak $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.*

Důkaz. Jako v mnoha podobných případech, důkaz můžeme vést dvěma základními způsoby:

- tvrzení odvodíme z analogického tvrzení pro posloupnosti (Lemma 2.8) použitím Heineho věty;
- provedeme důkaz přímo z definice.

Z cvičných důvodů se podívejme na důkaz druhou uvedenou metodou. Za uvedených předpokladů máme dokázat $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$. Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$, náš cíl je najít nějaké „vhodné“ $\delta > 0$.

Funkce g je podle předpokladu omezená na nějakém prstencovém okolí bodu c, neboli existuje nějaké $\delta_1 > 0$ („poloměr“ tohoto prstencového okolí) a konstanta K tak, že

$$\forall x \in P(c,\delta_1)\colon |g(x)| < K.$$

Dále víme, že $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. Pro výše dané ε tedy musíme být schopni najít $\delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c,\delta_2)\colon |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Položme nyní $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; toto δ je „vhodné“, neboť pak pro libovolně zvolené $x \in P(c,\delta)$ dostáváme

$$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \frac{\varepsilon}{K}\cdot K = \varepsilon,$$

a důkaz je hotov. □

3.3 Věty Bolzanova a Weierstrassova a jejich důsledky

Definice. Nechť je funkce f definovaná na intervalu $I = [a,b]$. Řekneme, že f je spojitá na I pokud f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a je zprava spojitá v a a zleva spojitá v b. Podobně definujeme spojitost na I, pokud $I = [a,b)$ apod.

Pokud je definičním oborem funkce sjednocení více intervalů, řekneme, že f je spojitá na svém definičním oboru, pokud je spojitá na každém z těchto intervalů.

Řekneme-li tedy například, že funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá na svém definičním oboru, máme tím na mysli, že je spojitá jak na intervalu $(-\infty, 0)$, tak na intervalu $(0, \infty)$, které dohromady tvoří celý definiční obor této funkce. Podobně i funkce $\operatorname{tg}(x)$ je spojitá na svém definičním oboru, což znamená, že je spojitá na každém intervalu tvaru $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Věta 3.13 (Bolzano)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom platí:*

(i) Pokud $f(a)$ a $f(b)$ jsou nenulová čísla s opačným znaménkem, potom existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f(x_0) = 0$.

(ii) Pro každé y mezi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $x \in [a, b]$ takové, že $f(x) = y$.

Důkaz dělením intervalů. Nejprve dokážeme první tvrzení, z něj pak už snadno plyne tvrzení druhé. Abychom si pro účely tohoto důkazu zjednodušili vyjadřování, pojďme se domluvit, že jakýkoliv uzavřený interval $[c, d] \subseteq \mathbb{D}_f$ nazveme *vhodný*, jestliže platí $\operatorname{sgn} f(c) = -\operatorname{sgn} f(d)$ (neboli f má opačné znaménko v jeho krajních bodech).

Položme $a_0 := a$ a $b_0 := b$; všimněme si, že podle předpokladu věty platí $\operatorname{sgn} f(a_0) = -\operatorname{sgn} f(b_0)$ (opačné znaménko), tj. interval $[a_0, b_0] = [a, b]$ je *vhodný*.

Rekurzí postupně definujeme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby definovaly klesající posloupnost *vhodných* intervalů, tj.

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \tag{3.8}$$

Konkrétně to provedeme následujícím způsobem:

Už máme *vhodný* interval $[a_0, b_0]$. Nyní předpokládejme, že už je definován *vhodný* interval $[a_n, b_n]$ a rozdělme ho na dvě stejně dlouhé poloviny (interval $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ později definujeme jako jednu z těchto polovin):

$$[a_n, b_n] = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right].$$

Protože $\operatorname{sgn} f(a_n) = -\operatorname{sgn} f(b_n)$, je zřejmé, že jsou tři (navzájem se vylučující) možnosti: pokud A) platí $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, našli jsme nulový bod funkce f, a důkaz je tedy hotov; v opačném případě máme buďto B) že $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ je *vhodný*, nebo C) $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ je *vhodný*. Kdyby totiž nenastávala ani jedna z těchto možností, znamenalo by to, že $\operatorname{sgn} f(a_n) = f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = \operatorname{sgn} f(b_n)$, a interval $[a_n, b_n]$ by tedy nemohl být *vhodný*.

Tímto rekurzivním postupem jsme tedy dostali buďto rovnou nulový bod funkce f (v tom případě se rekurze zastavila po konečně mnoha krocích), nebo nekonečnou klesající posloupnost *vhodných* intervalů (3.8), která navíc vznikla půlením, a tak délka těchto intervalů jde k nule (délka každého dalšího intervalu je poloviční).[1] Podle Cantorova principu (Věta 2.16) tedy existuje právě jeden bod v průniku:

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq [a, b].$$

Sporem ukážeme, že $f(x_0) = 0$; bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(x_0) > 0$ (případ $f(x_0) < 0$ je zcela analogický). Ze spojitosti f plyne existence $\delta > 0$, že $\forall x \in B(x_0, \delta)\colon f(x) > 0$. Protože však $x_0 \in [a_n, b_n]$ pro všechna n a délka těchto intervalů má limitu nula, od jistého indexu jsou všechny tyto intervaly obsaženy v $B(x_0, \delta)$, takže nemohou být *vhodné*, neboť funkce f je na $B(x_0, \delta)$ kladná. To je spor s předchozí konstrukcí, která zaručovala *vhodnost* všech zvolených intervalů. Proto je $f(x_0) = 0$, a jsme hotovi.

[1] Přesněji bychom tento fakt dokázali indukcí: snadno ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ (zkuste si to!), takže $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Pro důkaz druhé části věty mějme dáno libovolné y mezi $f(a)$ a $f(b)$. Pokud $y = f(a)$ nebo $y = f(b)$ jsme hotovi: hodnoty y se nabývá v bodě a nebo v bodě b. V opačném případě je y *ostře* mezi $f(a)$ a $f(b)$; definujeme-li tedy funkci g předpisem $g(x) = f(x) - y$ pro všechna $x \in \mathbb{D}_f$, pak hodnoty $g(a)$ a $g(b)$ mají opačné znaménko. Navíc je funkce g spojitá (protože je součtem spojité funkce f a konstantní funkce $-y$), a tedy podle první části věty (kterou už máme dokázanou), existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $g(x_0) = 0$. To znamená, že $0 = g(x_0) = f(x_0) - y$, tj. $f(x_0) = y$. □

Jiný důkaz Bolzanovy věty. Dokážeme první tvrzení. Nechť tedy funkce f splňuje předpoklady první části věty; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Definujme

$$Z = \{x \in [a, b] \colon f(x) < 0\}.$$

Pak $Z \neq \emptyset$, protože $a \in Z$ a také je to shora omezená množina, neboť je podmnožinou $[a, b]$. Proto podle Věty o supremu existuje $x_0 = \sup Z$. Tvrdím, že $f(x_0) = 0$.

Důkaz tohoto tvrzení povedeme sporem: Kdyby $f(x_0) \neq 0$, pak buďto $f(x_0) < 0$, nebo $f(x_0) > 0$; v obou případech odvodím spor. Předpokládejme nejprve, že $f(x_0) < 0$; pak ovšem $x_0 \neq b$, neboť $f(b) > 0$. Ze spojitosti funkce f tedy plyne, že $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0) < 0$ a odtud (použitím levostranné verze Lemmatu 3.10, nebo poznámky pod ním) $\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \colon f(x) < 0$. Tím pádem existuje nějaké takové $x > x_0$, že $f(x) < 0$, což ale znamená, že $x \in Z$ a zároveň $x > \sup Z$, což je spor.

Nyní předpokládejme druhou možnost, totiž že $f(x_0) > 0$. Důkaz je podobný, ale přece jen jiný. V tomto případě máme $x_0 \neq a$, protože $f(a) < 0$, a ze spojitosti f tedy máme, že $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) > 0$; odtud stejným postupem dostaneme, že

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \colon f(x) > 0. \tag{3.9}$$

Zvolme libovolné $c \in (x_0 - \delta, x_0)$; nyní ovšem máme, že funkce f je kladná na intervalu $[c, x_0)$ (podle (3.9)), je také kladná v bodě x_0 samotném (podle předpokladu) a je nezáporná na intervalu $(x_0, b]$ (protože $x_0 = \sup Z$ a f nabývá záporných hodnot pouze v bodech Z). Celkem tedy máme, že f je nezáporná na $[c, b]$ (na části této množiny víme, že je dokonce kladná, ale to nás nezajímá), a tedy $[c, b] \cap Z = \emptyset$. Tím pádem je bod c horní závora Z a přitom $c < x_0 = \sup Z$. To je spor s tím, že supremum je nejmenší horní závora (my jsme totiž našli nějakou menší). Dostali jsme spor v obou případech a nutně tedy platí, že $f(x_0) = 0$. Tím je dokončen důkaz první části.

Pro důkaz druhé části věty vizte poslední odstavec v prvním uvedeném důkazu této věty. □

Věta 3.14 (Weierstrass)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom platí:*

(i) Funkce f je omezená na $[a, b]$.

(ii) Funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima. Tj. existují body $x_m, x_M \in [a, b]$ takové, že

$$f(x_m) = \inf f([a, b]) = \min f([a, b]) \quad a \quad f(x_M) = \sup f([a, b]) = \max f([a, b]).$$

Připomeňme, že $f([a, b])$, tedy obraz při funkci f množiny $[a, b]$, je (podle definice) množina obrazů všech bodů z $[a, b]$, neboli

$$f([a, b]) = \{f(x) \colon x \in [a, b]\}.$$

Důkaz. Nejprve sporem dokážeme, že f je omezená; nechť je tedy neomezená. Tím pádem platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in [a, b] \colon |f(x)| > n;$$

indukcí (rekurzí) vybereme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a, b]$ splňující $|f(x_n)| > n$ pro všechna n. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty 2.17 existuje konvergentní vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$ (a tato limita x_0 je prvkem $[a, b]$, jak je vidno snadno z definice, nebo použitím Věty 2.13). Protože f je spojitá, Věta 3.3 implikuje $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$, a tedy $\lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = |f(x_0)| \in \mathbb{R}$. Na druhou stranu ale $|f(x_{k_n})| > n$ pro všechna n, a tedy podle Lemmatu o jednom policajtovi pro posloupnosti platí, že $\lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = \infty$, což je spor, neboť $\infty \notin \mathbb{R}$ (přesněji: limita nemůže být současně rovna $f(x_0)$ a ∞).

Nyní dokážeme, že funkce f nabývá svého maxima, a to opět sporem. Z první části důkazu víme, že existuje $\sup f([a,b]) = M \in \mathbb{R}$, protože f je omezená; pro spor předpokládejme, že tohoto suprema se nenabývá v žádném bodě intervalu $[a,b]$. Máme tedy $\forall x \in [a,b]\colon f(x) < M$, to jest $M - f(x) > 0$. Definujeme-li tedy pro $x \in [a,b]$

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

je g dobře definovaná na $[a,b]$ (v žádném bodě nedělíme nulou), kladná a spojitá (podle Věty 3.5). Tím pádem i g splňuje předpoklady, a podle první části věty je tedy g omezená funkce na $[a,b]$, tj.

$$\exists K > 0\ \forall x \in [a,b]\colon \frac{1}{M - f(x)} < K.$$

To ale po úpravách znamená, že $\forall x \in [a,b]$ je $f(x) < M - \frac{1}{K}$, a tedy $M - \frac{1}{K}$ je horní závora funkčních hodnot f, která je menší než jejich supremum M. To je spor s tím, že supremum je nejmenší horní závora. Tím pádem funkce f musí nabývat svého maxima; analogicky se dá dokázat i nabývání minima. Případně (místo opakování stejného důkazu pro případ minima) můžeme konstatovat, že (spojitá) funkce $-f$ nabývá svého maxima (podle právě dokázaného), a tedy f nabývá svého minima. □

Poznámka.

(a) Je důležité si uvědomit, že Weierstrassova věta neplatí pro spojitou funkci na otevřeném nebo polouzavřeném intervalu. Jako příklad vám může posloužit třeba funkce $\frac{1}{x}$, která je spojitá na $(0,\infty)$, ale nenabývá na tomto intervalu ani minima, ani maxima.

(b) Bolzanova věta říká, že za jistých předpokladů existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $f(x_0) = 0$. To lze přečíst také tak, že *rovnice* $f(x) = 0$ *má v intervalu* (a,b) *řešení*. Jinými slovy, Bolzanova věta nám garantuje existenci řešení některých rovnic. S její pomocí můžeme například pohodlně dokázat existenci druhé (i libovolné vyšší) odmocniny:

Mějme číslo $a > 0$ (pro $a = 0$ je odmocnina rovna 0, takže existuje); druhou odmocninu z a můžeme definovat jako nezáporné řešení rovnice $x^2 = a$. Položme $f(x) = x^2 - a$. Pak $f(0) = -a < 0$ a snadno se najde nějaké $b > 0$, že $f(b) > 0$. Protože funkce f je spojitá (jak víme z Věty 3.5), můžeme aplikovat Bolzanovu větu a konstatovat existenci jistého $x \in (0,b)$ takového, že $f(x) = 0$, což znamená, že $x^2 = a$. Druhá odmocnina z čísla a tedy existuje a je rovna x. Například pro $a = 2$ jsme tedy dokázali, že existuje $\sqrt{2}$; uvědomte si, že toto je netriviální vlastnost reálných čísel – ta, kterou se reálná čísla odlišují od čísel racionálních. Rozmyslete si, kde přesně v tomto důkazu existence $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ jsme použili Větu o supremu.

Poznámka. Vlastnost nabývání mezihodnot se někdy nazývá *Darbouxova vlastnost*. Přesněji:

Řekneme, že funkce f má na intervalu I Darbouxovu vlastnost, pokud

$$(\forall a, b \in I, a < b)\ (\forall y \text{ mezi } f(a) \text{ a } f(b))\ (\exists x \in [a,b])\colon f(x) = y.$$

Je dobré si uvědomit, že implikace mezi spojitostí a Darbouxovou vlastností platí pouze jedním směrem: Podle Bolzanovy věty máme: *f je spojitá $\Rightarrow$ f má Darbouxovu vlastnost.* Protipříkladem na opačnou implikaci je třeba funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

která má Darbouxovu vlastnost na celé množině $\mathbb{R}$, není ale spojitá v bodě 0. (Ověřte obě tato tvrzení.)

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- *rostoucí*, pokud $\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- *klesající*, pokud $\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
- *neklesající*, pokud $\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$;
- *nerostoucí*, pokud $\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$;
- *monotónní*, pokud je na I neklesající nebo nerostoucí;
- *ryze monotónní*, pokud je na I rostoucí nebo klesající;

Poznámka. Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení.

- „Nerostoucí“ a „není rostoucí“ je něco jiného;
- *Rostoucí* $\Rightarrow$ *neklesající;*
- *Neklesající* $\wedge$ *nerostoucí* $\Rightarrow$ *konstantní;*
- *Monotónní* $\wedge$ *prostá* $\Rightarrow$ *ryze monotónní.*

Věta 3.15. *Prostá spojitá funkce na intervalu je ryze monotónní.*

Důkaz. Nechť je funkce f prostá a spojitá na intervalu I; kdyby f nebyla ryze monotónní, musely by existovat body $x < y < z$ v I takové, že buďto $f(x) < f(y) > f(z)$, nebo $f(x) > f(y) < f(z)$. Ke sporu přivedeme pouze předpoklad, že nastává první z těchto dvou variant; spor v druhém případě se dostane analogicky.

Nechť tedy $x, y, z \in I$, $x < y < z$ a $f(x) < f(y) > f(z)$. Položíme-li $c = \max\{f(x), f(z)\} < f(y)$, potom $c \in [f(x), f(y))$ a také $c \in [f(z), f(y))$. Protože f je spojitá, Bolzanova věta v této situaci říká, že $\exists x_1 \in [x, y]\colon f(x_1) = c$ a že $\exists z_1 \in [y, z]\colon f(z_1) = c$.

Máme tedy $f(x_1) = c = f(z_1)$. Na druhou stranu ale $x_1 \neq z_1$, protože $f(x_1) < f(y)$, a tedy $x_1 \neq y$. Tím pádem máme, že $x_1 \in [x, y)$ a $z_1 \in [y, z]$, a jde tedy o prvky disjunktních intervalů – nemůžou být tedy stejné. Celkem tedy $f(x_1) = f(z_1)$ a $x_1 \neq z_1$, což je spor s prostotou f. $\square$

Věta 3.16. *Buď f spojitá na intervalu I. Pak $f(I)$ je interval (jde o degenerovaný – tedy jednobodový – interval v případě, že f je na I konstantní).*

Abychom mohli pohodlně dokázat tuto větu, je dobré si nejprve lépe uvědomit, co to vlastně je interval; k tomu se zase hodí pochopit pojem *konvexní množiny*:

Množina A v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, pokud pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in A$ platí, že úsečka spojující x_1 a x_2 je celá obsažena v A.

Pro $n = 2$, tedy v rovině, si lze snadno představit, co tato definice znamená; ona je však rozumná i v případě $n = 1$, tj. v prostoru dimenze 1, tj. na přímce: množina v $\mathbb{R}$ je konvexní, právě když s každými dvěma svými body x_1, x_2 obsahuje i všechny body x nacházející se mezi x_1 a x_2.

Platnost následujícího lemmatu, které popisuje intervaly v $\mathbb{R}$ jako právě ty množiny, které jsou podle výše uvedené definice konvexní, se mi zdá intuitivně jasná a podrobný důkaz se rozhodně nemusíte učit. Na druhou stranu mi bylo líto důkaz nezařadit aspoň pro ty čtenáře, které zajímá, co vlastně obnáší důkaz něčeho tak intuitivně zřejmého.

Lemma. *Buď $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak I je interval, právě když I je konvexní.*

Důkaz. Připomeňme si nejprve definici intervalu v $\mathbb{R}$: jde o množinu všech $x \in \mathbb{R}$ splňujících jisté nerovnosti, přičemž jsou různé možnosti, jak můžou tyto nerovnosti vypadat (každá z nich nám dá interval jiného typu):

- $x > a$
- $x < b$
- $x \geqslant a$
- $x \leqslant b$
- $a < x < b$
- $a \leqslant x \leqslant b$
- $a < x \leqslant b$
- $a \leqslant x < b$

Ve všech případech platí, že kdykoliv x_1, x_2 jsou prvky intervalu, pak také libovolné x mezi x_1 a x_2 je prvkem tohoto intervalu. Například pro interval I definovaný nerovnostmi $a < x < b$, tj. $I = (a, b)$, pokud $x_1, x_2 \in (a, b)$ a $x_1 < x < x_2$, pak také $a < x < b$, tj $x \in (a, b)$ – a velmi podobné argumenty fungují i pro všechny ostatní typy intervalů. Vidíme tedy, že každý interval je konvexní množina v $\mathbb{R}$.

K důkazu opačné implikace nyní naopak mějme libovolnou neprázdnou konvexní množinu $I \subseteq \mathbb{R}$ a dokažme, že jde o interval. Položme $a = \inf I$, $b = \sup I$; pak $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a \leqslant b$. Jsou nyní různé možnosti (které odpovídají výše uvedeným osmi typům intervalů) plynoucí z toho, že a, b můžou být konečné, nebo nekonečné a můžou a nemusí být obsaženy v I. Nebudeme probírat zvlášť všech 8 možností, pro ilustraci předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, $a \notin I$ a dokažme, že v tomto případě $I = (a, \infty)$ (a tedy skutečně I je interval, jak máme dokázat). Protože $a = \inf I$, $a \notin I$, je jasné, že $I \subseteq (a, \infty)$. Stačí tedy dokázat ještě opačnou inkluzi; nechť tedy $x \in (a, \infty)$. Pak tedy $\inf I = a < x < \infty = \sup I$, a podle definice infima a suprema existují prvky $x_1, x_2 \in I$ tak, že $x_1 < x < x_2$. Protože I je konvexní, obsahuje všechny prvky mezi x_1 a x_2, tedy i $x \in I$. Tím jsem dokázali i onu opačnou inkluzi, neboť libovolný prvek $x \in (a, \infty)$ je skutečně také prvkem I. □

Důkaz Věty 3.16. Pokud f je na I konstantní, je $f(I)$ jednobodová množina, tj. (degenerovaný) interval, a není tedy co dokazovat. Předpokládejme proto, že f je na I nekonstantní funkce.

K důkazu použijeme intuitivně zřejmého faktu (viz Lemma výše), že intervaly v $\mathbb{R}$ jsou právě konvexní podmnožiny $\mathbb{R}$, tj. že množina $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, právě když kdykoliv máme dva body $x_1, x_2 \in I$, pak I obsahuje také všechny body mezi x_1 a x_2.

Stačí tedy dokázat, že pro všechny hodnoty $y_1, y_2 \in f(I)$ a všechna y ležící mezi y_1 a y_2 platí $y \in f(I)$. Mějme tedy libovolné hodnoty $y_1, y_2 \in f(I)$ a najděme nějaké body $x_1, x_2 \in I$, v nichž se těchto hodnot nabývá, tj. $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nevíme, jestli $x_1 < x_2$, nebo naopak, bez újmy na obecnosti ale předpokládejme první možnost. Pak $[x_1, x_2] \subseteq I$ (jelikož I je interval obsahující x_1 i x_2), přičemž f je na $[x_1, x_2]$ spojitá, neboť je spojitá dokonce na celém intervalu I. Je-li tedy y libovolné číslo mezi y_1 a y_2, podle Bolzanovy věty 3.13 existuje $x \in [x_1, x_2]$ takové, že $f(x) = y$, čímž je důkaz dokončen: ukázali jsme totiž, že $f(I)$ je konvexní, a podle výše uvedeného pozorování to tedy je interval. □

Tvrzení poslední věty spočívá v tom, že spojitý obraz intervalu je interval, a „nemá tedy žádné díry“. Například vidíme, že obor hodnot spojité funkce definované na intervalu, je zase interval; známe-li globální minimum m i maximum M této funkce, můžeme rovnou konstatovat, že obor hodnot je $[m, M]$.

Věta 3.17. *Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ prostá a spojitá na intervalu I, pak $J = f(I)$ je interval a inverzní funkce $f^{-1} : J \to I$ je na něm spojitá.*

Důkaz. Podle Věty 3.16 je $J = f(I)$ interval. Podle Věty 3.15 je funkce f buďto rostoucí nebo klesající; bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je rostoucí. Dokážeme, že f^{-1} je zprava spojitá v každém bodě J, který není pravý krajní; analogicky se provede důkaz „zleva“, a ve všech vnitřních bodech J tak budeme mít oboustrannou spojitost, zatímco v případných krajních bodech příslušnou jednostrannou.

Buď tedy y nějaký bod intervalu J, který není pravý krajní, označme $x = f^{-1}(y)$ a budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Chceme najít příslušné δ z definice spojitosti zprava funkce f^{-1} v bodě y. Zvolme si libovolné $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ takové, že $x + \varepsilon_1 \in I$ (jde pouze o pomocný krok, děláme ho proto, abychom si mohli být jisti, že je definováno $f(x + \varepsilon_1)$). Položme

$$\delta = f(x + \varepsilon_1) - f(x), \quad \text{tj.} \quad y + \delta = f(x + \varepsilon_1); \tag{3.10}$$

tvrdím, že toto δ je vhodné: Je-li dáno libovolné $z \in P_+(y, \delta) = (y, y + \delta)$, pak

$$f^{-1}(z) \in (f^{-1}(y), f^{-1}(y + \delta)) = (f^{-1}(y), x + \varepsilon_1) = (f^{-1}(y), f^{-1}(y) + \varepsilon_1) \subseteq B(f^{-1}(y), \varepsilon),$$

což plyne z toho, že f (a tedy i f^{-1}) je rostoucí, dále z toho, že $f^{-1}(y + \delta) = x + \varepsilon_1$ (viz (3.10)), a z toho, že $\varepsilon_1 < \varepsilon$. □

Kapitola 4

Derivace funkce

4.1 Definice a základní metody výpočtu

Základní fyzikální motivace pro pojem derivace je „okamžitá rychlost“. Je názorné, že průměrnou rychlost $\overline{v}$ v časovém intervalu $[t_0, t]$ spočteme jako $\overline{v} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$, kde s je funkce popisující délku dráhy v závislosti na čase. Uvedenému zlomku se často říká diferenční podíl, jeho čitatel nazýváme diferencí funkce a jeho jmenovatel je diferencí argumentu.

Intuitivně dává dobrý smysl definovat okamžitou rychlost v čase t_0 jako limitu průměrných rychlostí přes kratší a kratší intervaly „okolo t_0“, tedy jako limitu $\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$; jedná se o derivaci funkce s v bodě t_0.

Definice. Řekneme, že funkce f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *derivaci* $f'(a) \in \mathbb{R}^*$, pokud platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{4.1}$$

Dále definujeme *derivaci zprava (resp. zleva)* limitou téhož diferenčního podílu zprava (resp. zleva). Derivace funkce f v bodě a zprava a zleva značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$. Stejně jako u obecné limity hovoříme o *vlastní* derivaci, pokud je její hodnota konečná (tedy $\in \mathbb{R}$), v opačném případě hovoříme o derivaci *nevlastní*.

Poznámka.

- Pomocí jednoduché substituce (aplikace věty o limitě složené funkce s lineární vnitřní funkcí) dostaneme druhou běžnou definice derivace funkce f v bodě a:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Protože derivace je definována jako limita (jisté funkce), platí pro ni některá analogická tvrzení jako pro obecné limity. Například derivace v bodě existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace (tedy zleva i zprava) a jsou si rovny.

- Protože derivaci (aspoň jednostrannou) lze v principu počítat v každém bodě definičního oboru, dává dobrý smysl derivaci chápat jako funkci (bod a, ve kterém počítáme derivaci $f'(a)$ se stává proměnnou, kterou pak obvykle značíme opět x).

Geometrická interpretace derivace: Už jsem se zmínil o tom, jak lze derivaci chápat ve fyzice: například derivace funkce $s(t)$ popisující délku dráhy v závislosti na čase je rychlost v daném okamžiku (tj. například $s'(a)$ chápeme jako okamžitou rychlost v čase a). Jak bylo řečeno, princip pojmu *okamžité rychlosti* je v tom, že počítáme průměrnou rychlost za kratší a kratší časové intervaly obsahující čas a. Limitní hodnota těchto průměrných rychlostí je rychlost okamžitá.

Jsou ale i jiné (i když související) způsoby, jak derivaci pochopit. Možná ten nejpřirozenější je geometrický, tj. v podstatě pomocí obrázku. K tomu je potřeba znát ještě jeden pojem, který se obvykle probírá už na středním stupni – směrnice přímky. Lineární funkce tvaru $L(x) = rx + s$, jejímž grafem je přímka (označme ji taky L), je určena dvěma koeficienty r a s, přičemž právě r se nazývá *směrnice přímky* L. Je to přirozené, neboť hodnota koeficientu r celkem zjevně udává rychlost růstu (pokud $r > 0$), případně poklesu (pokud $r < 0$), souvisí tedy se *směrem přímky* (zatímco hodnota koeficientu s ovlivňuje „posunutí nahoru či dolů“). Vzhledem k tomu, že koeficient s nemá vliv na směr přímky, představme si nyní, že $s = 0$, takže $L(x) = rx$; pak je $L(0) = 0$, a přímka tedy prochází počátkem. Podívejme se na hodnotu v bodě 1: platí $L(1) = r$. Můžeme si tedy představit pravoúhlý trojúhelník určený body $(0,0)$, $(1,0)$ a $(1,r)$ (první a poslední z těchto bodů leží na grafu L). Jeho vodorovná odvěsna má délku 1, jeho svislá odvěsna má délku $|r|$; označíme-li α úhel u bodu $(0,0)$, pak platí $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{r}{1} = r$,[1] neboli:

Pozorování 4.1. *Je-li $L(x) = rx + s$ a α je úhel, který přímka L svírá s osou x, pak $\operatorname{tg}(\alpha) = r$. Řečeno slovy, „směrnice je tangens toho úhlu“.*

Zpět k derivaci: uvažujme nyní nějakou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a mějme také bod $a \in \mathbb{R}$, ve kterém počítáme derivaci $f'(a)$. Budeme nyní brát různé body x v blízkosti a a spojíme oba příslušné body grafu funkce f (tj. body $(a, f(a))$ a $(x, f(x))$) přímkou, kterou můžeme neformálně nazvat *sečnou grafu* f. Při tom mějme na paměti, že bod $(a, f(a))$, jímž sečna prochází, je pevný; naproti tomu bod $(x, f(x))$ si představme jako „volný“ v tom smyslu, že se může „po grafu f pohybovat“, přičemž se příslušně otáčí ona sečna oběma body (z nichž jeden se hýbe) určená. Je celkem jednoduché si představit, že když se bod $(x, f(x))$ blíží k pevnému bodu $(a, f(a))$, příslušná sečna *víc a více připomíná* tečnu ke grafu funkce f – a v limitním případě (kdy oba určující body splynou v jeden) se vlastně tečnou stane.

Tečnu ke grafu funkce f (v bodě $(a, f(a))$) tedy můžeme chápat jako jakousi *limitní sečnu*, nebo *limitu sečen*. Tato vyjádření jsou pochopitelně nepřesná a mají pouze navodit jistou představu; jak ovšem tato představa souvisí s derivací, která je definována prostě vzorečkem (4.1)?

Vraťme se k sečně a uvažujme analogický pravoúhlý trojúhelník jako výše u výkladu pojmu směrnice, nyní však určený body $(a, f(a))$, $(x, f(a))$ a $(x, f(x))$. Není těžké si uvědomit, že jeho svislá odvěsna má orientovanou délku (tj. může jít o záporné číslo) $f(x) - f(a)$ a jeho vodorovná odvěsna má orientovanou délku $x - a$. Z obrázku je nyní snadno vidět, že

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

kde α je orientovaný úhel, který příslušná sečna svírá s osou x. Všimněte si zlomku napravo: tento typ výrazu nazýváme *diferenční podíl* (tj. podíl rozdílů), je roven směrnici sečny grafu f procházející body $(a, f(a))$ a $(x, f(x))$.

Derivace je přitom definována jako limita uvedených diferenčních podílů, když $x \to a$, tedy jako limita směrnic sečen, které se „blíží tečně“. Je to tedy směrnice tečny. To se snaží znázornit i následující neformální schéma na němž je snad vidět, jak se limitním procesem stane ze sečny tečna a ze směrnice

[1] Protože r může být záporné, měli bychom správně hovořit o *orientovaném* úhlu α.

sečny (tj. diferenčního podílu) směrnice tečny (derivace):

sečna	$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$=$	směrnice sečny
$\downarrow$	$\downarrow$	$(x\to a)$	$\downarrow$
tečna	$f'(a)$	$=$	směrnice tečny

Z výše uvedených úvah by – intuitivně vzato – mělo být zřejmé, že rozumná geometrická interpretace pojmu derivace souvisí s pojmem „tečny“ ke grafu funkce, a to konkrétně tak, že $f'(a)$ je směrnice „tečny“ ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$. Zde ovšem schválně dávám slovo „tečna“ do uvozovek, aby bylo jasné, že až dosud šlo v našich úvahách o nepřesný pojem, který nám pouze pomáhal lépe pochopit definici derivace. Protože se však tato intuice zdá být rozumná, nic nám nebrání *tečnu* definovat, a to tak, aby vzniklý přesně definovaný koncept byl i nadále v souladu s naší intuicí (a my v podobných vyjádřeních už nikdy nemuseli dávat toto slovo do uvozovek). Zavádíme tedy následující definici.

Definice 4.2. Nechť má funkce f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci $f'(a)$. Pak definujeme tečnu ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$ jako přímku s rovnicí

$$y = f(a) + f'(a)(x-a),$$

neboli jako množinu všech bodů (x, y) v rovině, které uvedenou rovnici splňují.

Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, má smysl hovořit o „směru funkce v bodě a“, nebo o „rychlosti jejího růstu“ v onom bodě. Obojí jsou jiné výrazy pro směrnici přímky, která funkci na okolí bodu a nejlépe aproximuje. Tato přímka, kterou nazýváme *tečna ke grafu funkce f v bodě* $(a, f(a))$ je definována výše a z jejího předpisu je ihned vidět, že má tu správnou směrnici – je jí číslo $f'(a)$. Takto definovaná tečna tedy má ten správný směr. Uvědomme si ještě, že skutečně prochází bodem $(a, f(a))$; to ověříme jednoduše tak, že do rovnice dosadíme $x = a$ a $y = f(a)$. Dostaneme

$$f(a) = f(a) + f'(a)(a-a)$$

a po triviální úpravě pravé strany vidíme, že rovnost skutečně nastává, neboli bod $(a, f(a))$ na této přímce skutečně leží. To pochopitelně není žádná náhoda, rovnice tečny je vymyšlena právě tak, „aby to vyšlo“, tj. aby měla požadovaný směr a procházela požadovaným bodem.

Můžeme si ještě všimnout jednoho dalšího způsobu, jak se dívat na vztah funkce a tečny k jejímu grafu. V Definici 4.2 je tečna definována pomocí rovnice přímky; stejně tak bychom ji ale mohli definovat jako graf lineární funkce

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

kde jsem schválně zvýraznil proměnnou x zelenou barvou, aby jasněji vyniklo, že ostatní zúčastněné výrazy, jmenovitě a, $f(a)$, $f'(a)$ jsou čísla (konstanty) vzhledem k tomu, že $a \in \mathbb{D}_f$ je pevně zvolený bod (číslo). Jaký je tedy vztah naší funkce f a lineární funkce L (jejíž graf je tečna ke grafu f v bodě $(a, f(a))$)?

Je snadno vidět[2]

$$\begin{aligned} f(a) &= L(a) \qquad \text{a také} \\ f'(a) &= L'(a), \end{aligned}$$

tj. že L je právě taková lineární funkce, která má v bodě a nejen stejnou *hodnotu* jako f (takových lineárních funkcí je nekonečně mnoho), ale má i stejný *směr* jako funkce f v bodě a.

[2] První rovnost je vidět po dosazení a do funkce L a druhá se buď snadno ověří přímo z definice derivace $L'(a)$ – což je lehké cvičení na definici, které vám doporučuji – nebo si počkáte na Příklad 4.3 a Větu 4.5 níže, z nichž se dozvíme, jak se derivuje lineární funkce (dokonce libovolná polynom). Jak ostatně skoro každý ví už na tomto místě, platí $(rx+s)' = r$, tj. derivace lineární funkce je vlastně její směrnice.

Příklad 4.3.

- Konstantní funkce má nulovou derivaci v každém bodě (triviálně z definice derivace).
- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n$. Dostaneme

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} = na^{n-1}.$$

  Nyní je vhodné si vzpomenout na poslední bod poznámky výše a interpretovat tento výsledek následující formulkou, ve které derivaci funkce x^n chápeme opět jako funkci (kterou dostaneme tak, že x^n derivujeme postupně ve všech bodech):

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{4.2}$$

- V předchozím příkladě pro $n = 3$ dostaneme $(x^3)' = 3x^2$; speciálně tedy v bodě 0 je derivace funkce x^3 rovna $3 \cdot 0^2 = 0$. Porovnáme-li nyní tento výsledek s poznámkou výše o tečně, vidíme jasně, že v bodě 0 má tečna ke grafu funkce x^3 zvláštní vlastnost (všimněme si, že tato tečna má rovnici $y = 0$, tedy je to právě osa x): napravo od bodu 0 se tečna nachází pod grafem funkce, zatímco nalevo se nachází nad grafem; v jistém smyslu tedy graf funkce „protíná“, místo aby se pouze „dotýkala“ – to je však běžný jev a je to zcela v pořádku.
- Jako snadné cvičení si můžete zkusit zderivovat (z definice) funkci e^x. Platí $(e^x)' = e^x$.
- Derivace dalších funkcí (které se dozvíme později):

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (x^p)' = px^{p-1} \text{ (pro libovolné } p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \qquad \triangle$$

Věta 4.4. *Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom f je v bodě a spojitá.*

Důkaz. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, tj. $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$. To je ale snadné:

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Příklad. Existence derivace pro spojitost není postačující podmínkou; ve výše uvedené větě je podstatný předpoklad existence *vlastní* (a tedy konečné) derivace (rozmyslete si, kde v důkazu tento předpoklad využíváme!). Například funkce sgn má v bodě 0 derivaci rovnou ∞, není ale v bodě 0 spojitá (oba fakty si můžete zkusit dokázat jako snadná cvičení).

Na druhou stranu ale nekonečná derivace neimplikuje nespojitost, jak se snadno můžete přesvědčit třeba použitím příkladu funkce $\sqrt[3]{x}$, která má v bodě 0 nekonečnou derivaci (snadné cvičení), ale je v nule spojitá.

Na stranu třetí navíc ani neplatí, že by nespojitost implikovala nekonečnou derivaci (třeba funkce $\sin \frac{1}{x}$ není v bodě 0 spojitá, ale nemá tam ani žádnou jednostrannou derivaci. Lze tedy říci, že mezi nespojitostí a existencí nekonečné derivace obecně není žádná souvislost.

Kromě toho všeho se taky na jednoduchém příkladu funkce $|x|$ v bodě 0 lze přesvědčit, že spojitá funkce nemusí mít v každém bodě derivaci. (Body, ve kterých spojitá funkce nemá derivaci, lze často popsat jako „hroty“ nebo „zlomy“.) Dokonce existuje spousta spojitých funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, které nemají derivaci v žádném bodě. $\triangle$

Věta 4.5. *Nechť f a g jsou funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, a nechť dále $a, r \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

(i) $(r \cdot f)'(a) = r \cdot f'(a)$, *má-li pravá strana smysl.*

(ii) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *má-li pravá strana smysl.*

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *má-li pravá strana smysl a* $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}$.

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$,*má-li pravá strana smysl a* $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}$.

Analogická tvrzení platí i pro jednostranné derivace.

Důkaz. První bod je triviální cvičení na definici derivace; dokážeme o něco těžší bod (ii):

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

Protože pravá strana má smysl (podle předpokladu), použití věty o aritmetice limit je korektní.

Dokažme nyní vzorec pro derivaci součinu (iii). Vyjdeme opět z definice derivace a provedeme výpočet:

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} g(x)\cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} g(x)\cdot f'(a) + f(a)g'(a) \overset{(*)}{=} g(a)f'(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Výsledek výpočtu má smysl, takže všechna použití věty o aritmetice limit byla korektní. Je ovšem ještě potřeba zdůvodnit rovnost $(*)$. U bodu (iii) předpokládáme kromě smysluplnosti pravé strany ještě konečnost obou derivací, takže máme $g'(a) \in \mathbb{R}$. Věta 4.4 nám v takovém případě říká, že funkce g je v bodě a spojitá, což ovšem znamená přesně rovnost $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, a rovnost $(*)$ je dokázána.

(iv): Zbývá dokázat vzorec pro derivaci podílu. Díky existenci vlastních derivací (viz předpoklady bodu (iv)) víme, že obě funkce (tedy f i g) jsou v bodě a spojité podle Věty 4.4. Protože pravá strana má smysl, je navíc $g(a) \neq 0$, což společně se spojitostí g v bodě a implikuje existenci okolí bodu a, na němž je funkce g nenulová, to jest: $\exists \delta > 0\ \forall x \in B(a,\delta)\colon g(x) \neq 0$. Následující výpočet tedy nenaráží na žádné problémy:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a} = \\ &= \frac{1}{(g(a))^2}\cdot \left(g(a)\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\cdot \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \\ &= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.\end{aligned}$$

□

Příklad 4.6. Použitím právě dokázané věty a Příkladu 4.3 můžeme nyní snadno spočíst derivaci libovolného polynomu. Šlo by samozřejmě uvést obecný vzorec pro derivaci jakéhokoliv polynomu, možná jasnější to ale bude na konkrétní úloze:

$$\begin{aligned}&\left(7x^5+3x^3-x^2+1337x+69\right)' \\ &\quad= \left(7x^5\right)' + \left(3x^3\right)' + \left(-x^2\right)' + \left(1337x\right)' + \left(69\right)' \\ &\quad= 7\left(x^5\right)' + 3\left(x^3\right)' - \left(x^2\right)' + 1337\left(x\right)' + \left(69\right)' \\ &\quad= 35x^4 + 9x^2 - 2x + 1337 + 0.\end{aligned}$$

Zde na první rovnost opakovaně používáme pravidlo pro derivaci součtu z věty výše (bod (ii)) a na rovnost následující používáme vytýkání konstant z derivace (bod (i)). Při závěrečném kroku je poslední člen $(69)'$ zcela jasný, neboť jde o derivaci konstanty, a ta je nulová; ostatní členy derivujeme podle vzorce (4.2) z Příkladu 4.3.

Je snad jasné, že zde je tento výpočet uveden tak obšírně jen kvůli tomu, aby bylo vidět, jak přesně při něm využíváme už dokázaných faktů; v praxi bychom u derivace polynomu prostřední kroky přeskočili a napsali rovnou výsledek:

$$\left(7x^5 + 3x^3 - x^2 + 1337x + 69\right)' = 35x^4 + 9x^2 - 2x + 1337 + 0. \qquad \triangle$$

Věta 4.7 (Věta o derivaci složené funkce)**.** *Nechť f a g jsou funkce a existují vlastní derivace $g'(a)$ a $f'(g(a))$ (tedy derivace funkce f v bodě $g(a)$). Pak platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz. Nechť jsou splněny předpoklady věty. Označme $b = g(a)$ a na $\mathbb{D}_f$ definujme pomocnou funkci F předpisem

$$F(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(b)}{y-b}, & \text{pokud } y \in \mathbb{D}_f \setminus \{b\}, \\ f'(b), & \text{pokud } y = b. \end{cases}$$

Funkce F je v bodě b spojitá, neboť platí

$$\lim_{y \to b} F(y) = \lim_{y \to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b) = F(b).$$

Dále si všimněme, že funkce g je spojitá v bodě a, protože tam má vlastní derivaci; platí tedy $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = b$ a podle Věty 3.9 o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí jest

$$\lim_{x \to a} F(g(x)) = F(g(a)) = F(b) = f'(b) = f'(g(a)). \tag{4.3}$$

Nyní chceme vypočítat

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a},$$

k čemuž se nám hodí diferenční podíly na pravé straně vyjádřit pomocí funkce F, a to tímto vzorcem, který dokážeme pro všechna $x \neq a$ z definičního oboru $f \circ g$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{4.4}$$

Vzorec platí triviálně pro taková x, že $g(x) = g(a)$; v tom případě jsou obě strany rovnice rovny nule. V opačném případě, tj. pokud $g(x) \neq g(a)$, počítáme takto:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Rovnost (4.4) je tím dokázána pro všechna $x \in \mathbb{D}_{f\circ g} \setminus \{a\}$, a derivaci složené funkce tedy vypočítáme z definice takto:

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \overset{(4.4)}{=} \lim_{x \to a} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \overset{(4.3)}{=} f'(g(a)) \cdot g'(a). \qquad \square$$

Poznámka (Jednodušší důkaz je špatně)**.** Na tomto místě chci podotknout, že existuje mnohem jednodušší důkaz Věty 4.7, který je ovšem korektní pouze za předpokladu, že

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a, \delta)\colon g(x) \neq g(a). \tag{4.5}$$

V tom případě nepotřebujeme pomocnou funkci F, ani dokazovat vzorec (4.4) nadvakrát; místo toho lze provést přímý výpočet pomocí standardního triku rozšíření zlomku vhodným výrazem:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) \cdot g'(a),\end{aligned}$$

kde poslední rovnost (zejména limita prvního z obou zlomků) vyplývá z Věty 3.8 o limitě složené funkce s podmínkou (P) (ta je splněna podle předpokladu 4.5). Podstatný moment tohoto jednoduchého výpočtu je také hned druhá rovnost, kde zlomek rozšiřujeme výrazem $g(x) - g(a)$. Aby to bylo korektní, musíme vědět, že na jistém prstencovém okolí bodu a je tento výraz nenulový. To ovšem není a priori jasné a i zde nám tedy poslouží předpoklad (4.5).

Všimněte si dále, že podmínka (4.5), která výrazně zjednodušuje důkaz Věty 4.7, je splněna například za předpokladu, že $g'(a) \neq 0$. Nabízí se proto zkusit Větu 4.7 dokázat nejprve za předpokladu $g'(a) \neq 0$ (což je, jak jsme právě viděli, snadné) a pak zvlášť ukázat, že pokud $g'(a) = 0$, pak i $(f \circ g)'(a) = 0$. Tímto způsobem to skutečně lze provést. My jsme pro náš důkaz této věty zvolili jiný postup, který s pomocí funkce F postihuje všechny případy naráz.

Poznámka (S definicí *sudé/liché* funkce)**.**

- Informace obsažená ve Větě 4.7 se obvykle vyjadřuje ve formě vzorce takto:

  $$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

  Při aplikaci tohoto jednoduchého vzorce je však potřeba mít na paměti předpoklad obsažený ve Větě 4.7, totiž že obě derivace existují a jsou vlastní. Všechny body a, pro které neexistují (oboustranné!) vlastní derivace $g'(a)$ a $f'(g(a))$ musí být vyšetřeny zvlášť – může se totiž stát, že derivace (případně jednostranné) v takových bodech existují, ačkoliv nejsou Větou 4.7 garantovány.

- Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže $\forall x \in \mathbb{D}_f\colon f(-x) = f(x)$.
  Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže $\forall x \in \mathbb{D}_f\colon f(-x) = -f(x)$.
  Poznamenejme, že funkce je sudá, právě když je její graf osově souměrný podle souřadnicové osy y. Lichost odpovídá středové souměrnosti grafu podle počátku.

- Jako jednoduché cvičení si můžete dokázat, že pokud f je lichá, pak $f'(x) = f'(-x)$, má-li jedna strana smysl. (Jinak řečeno f' je sudá na svém definičním oboru.) Podobně platí, že derivace sudé funkce je na svém definičním oboru lichá.

Věta 4.8 (Věta o derivaci inverzní funkce)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je prostá. Nechť existuje nenulová vlastní derivace $f'(x_0) \neq 0$ v nějakém bodě $x_0 \in I$. Potom f^{-1} je spojitá a pro $y_0 = f(x_0)$ platí*

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Důkaz. Důkaz spočívá v následujícím výpočtu, jehož jednotlivé kroky ospravedlníme níže.

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

První rovnost tohoto výpočtu je z definice derivace. Druhá rovnost je nejdůležitější: „dosazujeme $f(x)$ za y“. Rovnost obou limit plyne z Věty 3.8 o limitě složené funkce s podmínkou (P), kde roli vnější funkce má $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ a vnitřní funkce je $f(x)$. Protože $f'(x_0)$ je podle předpokladu vlastní, je funkce f v bodě x_0 spojitá, a platí tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Podmínka (P) je splněna triviálně, protože funkce f je prostá (takže hodnoty $f(x_0)$ nabývá právě a jen v bodě x_0, a v podmínce (P) tedy za δ můžeme vzít jakékoliv kladné číslo).

Třetí rovnost plyne z definice inverzní funkce: $f^{-1}(f(x)) = x$ a podobně pro x_0. Následující rovnost je jasná a poslední rovnost plyne z Věty o aritmetice limit a z definice derivace. Pravá strana má smysl díky předpokladu $f'(x_0) \neq 0$, a výpočet je tedy korektní. Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 4.9. Příklady užití věty o derivaci inverzní funkce:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pro první vzorec ve Větě 4.8 bereme $f(x) = e^x$, pro druhý vzorec $f(x) = \operatorname{tg} x$. My zde pro ilustraci odvodíme pouze třetí uvedený vzorec, mějme tedy $f(x) = \sin x$ na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.[3] Podle Věty 4.8 dostaneme následující, přičemž využijeme faktů $\sin' = \cos$ a také $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2 t}$ pro všechna $t \in (-\pi/2, \pi/2)$[4]:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dva zbývající vzorce se odvodí ještě jednodušeji a já vám to rád přenechám jako roztomilé cvičení. △

4.2 Základní věty diferenciálního počtu

4.2.1 Extrémy

Definice (Extrémy)**.** Řekneme, že funkce f *má v bodě c lokální maximum*, jestliže

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta)\colon\ f(x) \leqslant f(c) \tag{4.6}$$

Ostrou nerovností pak definujeme *ostré lokální maximum*. Opačná nerovnost (ostrá) definuje *lokální minimum* (ostré). Pojmy (ostrého) lokálního maxima a minima sdružujeme pod společný pojem *(ostrého) lokálního extrému*.

Řekneme, že funkce f *má v bodě c globální maximum*, pokud $\forall x \in \mathbb{D}_f\colon f(x) \leqslant f(c)$. *Globální minimum* definujeme opačnou nerovností; hovoříme pak o *globálních extrémech*.

Věta 4.10 (Fermat)**.** *Nechť má funkce f v bodě c lokální extrém. Existuje-li $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$.*

---

[3] Tj. $f = \sin|_{(-\pi/2,\pi/2)}$, neboli f je restrikce funkce sin na uvedený interval.

[4] To lze snadno odvodit ze známého vzorce $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, tj. $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, odkud $|\cos t| = \sqrt{1-\sin^2 t}$ a zbývá jen uvědomit si, že $\cos t$ je na daném intervalu kladný.

Důkaz. Nechť f má v bodě c lokální maximum (případ minima se dokáže analogicky), tj. ať platí (4.6), a nechť existuje derivace $f'(c)$. Podle definice je

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Přitom ale z rovnice (4.6) plyne, že pro $x \in P(c, \delta)$ jest $f(x) - f(c) \leqslant 0$, tedy čitatel onoho diferenčního podílu je nekladný. Naproti tomu jmenovatel $x - c$ je kladný pro $x > c$ a záporný pro $x < c$. Dostáváme

$$\forall x \in (c - \delta, c) \colon \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, c + \delta) \colon \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$

a tedy derivace zleva (tj. limita tohoto zlomku zprava) splňuje $f'_-(c) \geqslant 0$ podle Lemmatu 3.10 (resp. jeho levostranné verze); podobně je vidět, že $f'_+(c) \leqslant 0$.

Z existence (oboustranné) derivace v bodě c ale víme, že $f'_-(c) = f'_+(c)$ a z nerovností výše plyne, že jejich společná hodnota musí být nulová. □

Poznámka. Je důležité si uvědomit, že $f'(c) = 0$ není postačující podmínka pro extrém. Například funkce x^3 má v bodě 0 nulovou derivaci, ale nemá tam extrém. Extrém taky může existovat i v bodech, kde neexistuje derivace. Třeba funkce $|x|$ má v bodě 0 ostré minimum, ale nemá tam derivaci.

Při hledání extrémů funkce tedy můžeme postupovat tak, že funkci zderivujeme a najdeme všechny body, ve kterých je derivace nulová. Tyto body označíme za *podezřelé z extrému*. Další podezřelé body jsou pak body, v nichž derivace neexistuje, a krajní body definičního oboru. Abychom mohli rozhodnout o přítomnosti extrému, musíme pak ve všech těchto podezřelých bodech provést další úvahy.

4.2.2 Věty o střední hodnotě

Definice. Řekneme, že funkce f *je v bodě c rostoucí*, jestliže

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon (x > c \Rightarrow f(x) > f(c)) \wedge (x < c \Rightarrow f(x) < f(c)).$$

Opačnými nerovnostmi definujeme pojem *klesající v bodě*. Neostré nerovnosti pak definují příslušné neostré pojmy (*neklesající v bodě* a *neroustoucí v bodě*). Řekneme, že bod c je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže $f'(c) = 0$.

Lemma 4.11. *Nechť f je funkce a $f'(c) > 0$. Pak f je v bodě c rostoucí.*

Důkaz. Z definice derivace jakožto limity a z definice limity plyne (viz též Lemma 3.10 a Poznámku 3.2.4), že existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P(c, \delta)$ je

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Protože pro $x \in (c, c + \delta)$ je jmenovatel kladný, musí být kladný i čitatel, tedy $f(x) > f(c)$.
Protože pro $x \in (c - \delta, c)$ je jmenovatel záporný, musí být záporný i čitatel, tedy $f(x) < f(c)$. □

Je snad jasné, že analogické tvrzení platí pro zápornou derivaci: v tom případě je funkce v tom bodě klesající.

Poznámka. Je triviálním důsledkem definice (o čemž byste se měli sami přesvědčit), že když je funkce g v bodě c rostoucí (nebo klesající), pak

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta) \colon g(x) \neq g(c). \tag{4.7}$$

Toho lze využít při ověřování podmínky (P) z Věty o limitě složené funkce (Věta 3.8): Vyšetřujeme-li s její pomocí nějakou limitu tvaru $\lim_{x\to c} f(g(x))$, stačí vědět, že $g'(c)$ existuje a je různá od nuly. Podle právě dokázaného lemmatu je pak totiž funkce g v bodě c rostoucí nebo klesající (podle toho, jestli je $g'(c) > 0$ nebo $g'(c) < 0$), a tedy platí (4.7), což není nic jiného než podmínka (P).

Při praktických výpočtech limit lze tedy splnění podmínky (P) zdůvodnit tak, že derivace vnitřní funkce je v daném bodě kladná (nebo záporná).

Následující jednoduchá věta je primitivním příkladem „věty o střední hodnotě“; nám poslouží jako pomocné tvrzení pro důkaz silnější věty stejného typu.

Věta 4.12 (Rolle)**.** *Nechť je funkce f spojitá na nedegenerovaném (tj. $a < b$) intervalu $[a,b]$ a nechť existuje $f'(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$. Je-li $f(a) = f(b)$, pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*

Důkaz. Pokud f je konstantní, pak $f' = 0$ na celém intervalu (a,b). Pokud f není konstantní, jsou dvě možnosti (které se nevylučují): Buďto existuje $x \in (a,b)$, že $f(x) > f(a)$, nebo existuje $y \in (a,b)$, že $f(y) < f(a)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nastává první možnost (v opačném případě se důkaz provede analogicky).

Podle Weierstrassovy věty (3.14) existuje $\xi \in [a,b]$, že $f(\xi) = \sup f([a,b])$, tedy f nabývá v bodě ξ svého maxima. Protože jsme předpokládali, že $\exists x \in (a,b)\colon f(x) > f(a)$, je i $f(\xi) > f(a) = f(b)$, a tedy $\xi \neq a$ a $\xi \neq b$ – jinak řečeno $\xi \in (a,b)$.

Podle předpokladu věty tedy existuje derivace $f'(\xi)$, a protože ξ je bodem maxima, jest podle Fermatovy věty 4.10 $f'(\xi) = 0$.

□

Věta 4.13 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na nedegenerovaném (tj. $a < b$) intervalu $[a,b]$ a nechť existuje $f'(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Příklad. Situace: Dne 4. února 2008 proběhla médii zpráva obsahující následující informace: Premiér Mirek Topolánek se předchozího dne účastnil televizní debaty, která končila ve 13:00 v Praze. Ve 14:20 téhož dne už byl k vidění na tribuně tenisového stadionu v Brně, kam po skončení debaty přispěchal autem.
Otázka: Jak policista na tenisovém stadionu dokáže šoférovi pana premiéra, že v nějaký moment ξ musel překročit povolenou rychlost?
Odpověď: Policista musí znát a aplikovat Lagrangeovu větu; s její pomocí šoféra pana premiéra snadno z přestupku usvědčí. Podrobněji: Vzdálenost mezi Prahou a Brnem je 200km, jest tedy $s(13{:}00) = 0$ a $s(14{:}20) = 200$ km. Protože ani vládní Superby nedovedou akcelerovat nespojitě, má funkce s (popisující dráhu premiérova vozu) derivaci v každém bodě. Podle Lagrangeovy věty tedy musí existovat okamžik $\xi \in (13{:}00, 14{:}20)$ takový, že platí

$$v(\xi) = s'(\xi) = \frac{s(14{:}20) - s(13{:}00)}{14{:}20 - 13{:}00} = \frac{200\ \text{km}}{\frac{4}{3}\text{h}} = 150\ \text{km/h}.$$

Lagrangeova věta nám tedy říká, že v nějaký moment ξ cesty se okamžitá rychlost $v(\xi) = s'(\xi)$ musí rovnat rychlosti průměrné. (Pokud rychlost není konstantní, tento okamžik bude odlišný od okamžiku maximální rychlosti, která bude vyšší než průměrná.) △

Důkaz Lagrangeovy věty. Důkaz provedeme převedením na předchozí případ – od funkce f odečteme lineární funkci tak, aby byly splněny předpoklady Rolleovy věty. Položme

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Pak g je spojitá na $[a, b]$ a pro všechna $x \in (a, b)$ existuje derivace

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.8}$$

Navíc platí $g(a) = f(a)$ a

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

takže $g(a) = g(b)$; jsou tedy splněny předpoklady Rolleovy věty, která nám nyní zaručuje existenci $\xi \in (a, b)$ takového, že $g'(\xi) = 0$, tj. podle (4.8):

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \qquad \square$$

4.2.3 Intervaly monotonie

Nyní budeme vycházet z definice monotónní funkce na intervalu. Jako zajímavé (a ne zcela triviální cvičení) si můžete zkusit dokázat, že funkce je na intervalu (a, b) rostoucí, právě když je rostoucí v každém jeho bodě. To však v tento moment není podstatné. Následuje věta dávající do souvislosti znaménko derivace a monotonii funkce na intervalu.

Věta 4.14. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu I s krajními body $a = \inf I$ a $b = \sup I$ a nechť $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, b)$. Pak platí:*

(i) $(\forall x \in (a, b)\colon f'(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow$ *f je neklesající na I.*

(ii) $(\forall x \in (a, b)\colon f'(x) > 0) \Rightarrow$ *f je rostoucí na I.*

Poznámka.

- Je snad jasné, že analogická věta platí i pro nekladné (resp. záporné) derivace s nerostoucími (resp. klesajícími) funkcemi. V tomto i všech podobných případech se to dá dokázat buďto analogickým postupem, nebo převedením na předchozí případ pomocí $-f$: Třeba první tvrzení předchozí věty pro nekladnou derivaci dokážeme takto:

  $$\begin{aligned}(\forall x \in (a, b)\colon f'(x) \leqslant 0) &\Leftrightarrow (\forall x \in (a, b)\colon (-f)'(x) \geqslant 0)\\ &\overset{\text{(i)}}{\Leftrightarrow} (-f) \text{ je neklesající na } I \Leftrightarrow f \text{ je nerostoucí na } I.\end{aligned}$$

  Obdobně se dá postupovat i v dalších případech, kdy tvrzení věty omezujeme pouze na případ kladné derivace nebo rostoucí funkce. (Případně lze podobným postupem také odvodit nějaké tvrzení pro konkávní funkce z již známého tvrzení pro funkce konvexní, protože f je konkávní, právě když $-f$ je konvexní.)

- Je dobré si všimnout, že implikace ve druhém bodě věty se nedá otočit. Třeba funkce x^3 je rostoucí na $\mathbb{R}$, ale nemá ve všech bodech kladnou derivaci.

Důkaz Věty 4.14. Dokážeme první tvrzení. Nechť je $f'(c) \geqslant 0$ pro libovolné $c \in (a, b)$ a buďte $x < y$ libovolné dva body intervalu I. Chceme dokázat, že $f(x) \leqslant f(y)$. Podle Lagrangeovy věty (kterou můžeme aplikovat, neboť funkce f je spojitá na $[x, y] \subseteq I$ a má derivaci v každém bodě intervalu $(x, y) \subseteq (a, b)$) existuje $\xi \in (x, y)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Podle předpokladu je $f'(\xi) \geqslant 0$, tedy onen diferenční podíl (maje stejnou hodnotu) je také nezáporný. Protože $y - x > 0$, musí být $f(y) - f(x) \geqslant 0$, tedy $f(y) \geqslant f(x)$ a jedna implikace je dokázána.

Na druhou stranu, pokud f je neklesající, lze snadno nahlédnout, že pro libovolné dva různé body $x, y \in I$ je diferenční podíl

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

nezáporný (ať už je $x < y$ nebo naopak). Proto i libovolná limita takových diferenčních podílů (a tedy derivace v libovolném bodě intervalu (a, b)) je také nezáporná.

Druhé tvrzení se dokáže úplně stejně jako první implikace, jen místo všech neostrých nerovností máme ostré. $\square$

Poznámka. Předpoklad spojitosti ve Větě 4.14 je důležitý kvůli krajním bodům v I a (případným bodům s nevlastní derivací). Formulace věty totiž připouští interval libovolného typu.

Pokud je interval I otevřený, pak $I = (\inf I, \sup I) = (a, b)$. Máme-li ve všech bodech I dokonce *vlastní* derivaci, spojitost funkce f plyne automaticky z Věty 4.4.

Naproti tomu pokud I je uzavřený (nebo aspoň polouzavřený), předpoklad spojitosti na I zahrnuje i jednostrannou spojitost v krajních bodech – pak totiž $I = [\inf I, \sup I] = [a, b]$ a spojitost f na I znamená také spojitost v a zprava a spojitost v b zleva.

Následující tvrzení (které prezentujeme jako důsledek Věty 4.14, ale dá se podobně jednoduše odvodit i přímo z Lagrangeovy věty – cvičení) společně s triviálním faktem, že konstantní funkce má nulovou derivaci, dává charakterizaci konstantních funkcí: Jsou to *právě ty* funkce, které mají ve všech bodech nulovou derivaci. Všimněte si, že zatímco jedna implikace tohoto tvrzení je triviální z definice derivace, druhá implikace pro svůj důkaz potřebuje větu o střední hodnotě (Lagrangeovu), a je tedy netriviální.

Důsledek 4.15. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce na intervalu (a, b) taková, že $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak f je na (a, b) konstantní.*

Důkaz. Protože f má ve všech bodech (a, b) vlastní derivaci (nulu), je to spojitá funkce podle Věty 4.4. Podle Věty 4.14 je funkce f na (a, b) neklesající a zároveň nerostoucí (protože $f' \geqslant 0$ a zároveň $f' \leqslant 0$). Tím pádem musí být konstantní. $\square$

4.2.4 Limita derivace

Následující věta nám umožní vypočítat (jednostrannou) derivaci i v některých bodech, kde selhávají základní vzorce pro derivování. Větu formulujeme „zprava“; analogická tvrzení pochopitelně platí i pro derivaci zleva a pro oboustrannou derivaci.

Věta 4.16. *Je-li funkce f spojitá v bodě c zprava a existuje-li $\lim_{x \to c+} f'(x)$, pak existuje derivace $f'_+(c)$ a platí*

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+} f'(x).$$

Důkaz. Protože existuje limita $\lim_{x \to c+} f'(x)$, můžeme najít $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (c, c + \delta)$ je $f'(x) \in \mathbb{R}$ (z definice limity v bodě c zprava plyne, že funkce, v našem případě f', jejíž limitu uvažujeme, musí být definována – a tedy mít hodnotu $\in \mathbb{R}$ – na pravém prstencovém okolí c).

Máme tedy, že f je spojitá v c zprava a podle Věty 4.4 je také spojitá v každém bodě intervalu $(c, c + \delta)$. Celkem tedy máme spojitost f na intervalu $[c, c + \delta)$.

Je-li tedy dáno libovolné $x \in (c, c+\delta)$, máme splněny předpoklady Lagrangeovy věty na intervalu $[c, x]$; skutečně, f je na tom intervalu spojitá a ve všech jeho vnitřních bodech má derivaci. Můžeme tedy pro toto x najít nějaké takové $\xi(x) \in (c, x)$, že platí

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Protože takové $\xi(x)$ můžeme vybrat pro každé $x \in (c, c+\delta)$, je tímto výběrem vlastně zadána funkce $\xi\colon (c, c+\delta) \to \mathbb{R}$, která splňuje $c < \xi(x) < x$ pro každé $x \in (c, c+\delta)$. Z Lemmatu 3.11 („policajti“) plyne, že $\lim_{x \to c_+} \xi(x) = c$. Dostáváme:

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c_+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c_+} f'(\xi(x)) = \lim_{x \to c_+} f'(x),$$

kde první rovnost je definice derivace zprava, druhá rovnost plyne z volby $\xi(x)$ a třetí rovnost plyne z Věty 3.8 o limitě složené funkce s podmínkou (P); podmínka (P) je v tomto případě splněna triviálně, neboť vnitřní funkce ξ je ve všech bodech svého definičního oboru různá od svojí limity. $\square$

4.3 Konvexnost a konkávnost

Definice. Funkce f *je konvexní na intervalu* I, jestliže pro každé dva body $x, y \in I$ leží úsečka spojující příslušné body grafu (neostře) nad grafem f. Formálně:

$$\forall x, y \in I \quad \forall t \in (0,1)\colon\ f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Ostrou nerovností definujeme *ryzí konvexnost* a opačnými nerovnostmi *konkávnost* a *ryzí konkávnost*.

Pochopení formální definice konvexnosti spočívá v pochopení toho, jak fungují funkce

$$\varphi(t) = (1-t)x + ty \quad \text{a} \quad \psi(t) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Jedná se o lineární funkce (proměnná je $t \in [0,1]$). Je snadno vidět, že když t probíhá interval $[0,1]$, tak $\varphi(t)$ probíhá interval $[x, y]$ (případně $[y, x]$) a ψ probíhá interval $[f(x), f(y)]$ (případně $[f(y), f(x)]$).

V neformální verzi definice se hovoří o bodech grafu f příslušných bodům x a y – je snad jasné, že se jedná o body v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$. Protože funkce φ a ψ jsou lineární, je snadno vidět, že když t probíhá $[0,1]$, bod se souřadnicemi $(\varphi(t), \psi(t))$ probíhá úsečku spojující body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$. Přitom je ihned z definice patrné, že

$$(\varphi(0), \psi(0)) = (x, f(x)) \quad \text{a} \quad (\varphi(1), \psi(1)) = (y, f(y)).$$

Z těchto úvah by mělo být patrné, že formální i neformální definice konvexnosti říkají totéž.

Lemma. *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro libovolné body $x, x_1, x_2 \in I$ platí*

$$x_1 < x < x_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Věta 4.17. *Nechť f je spojitá na intervalu I s krajními body $a = \inf I$ a $b = \sup I$ a nechť $f'(x)$ existuje pro všechny body $x \in (a, b)$. Pak*

(i) f je konvexní na I, právě když f' je neklesající na (a, b);

(ii) f je ryze konvexní na I, právě když f' je rostoucí na (a,b).

Definice. Pokud f je funkce, která má na nějakém intervalu (a,b) vlastní derivaci f', pak definujeme *druhou derivaci* f v bodě x jako
$$f''(x) = (f')'(x),$$
pokud derivace na pravé straně existuje.

Důsledek 4.18. *Je-li f spojitá na intervalu I a $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) pro všechny vnitřní body x intervalu I, pak f je konvexní (resp. ryze konvexní) na I.*

Jako obvykle, analogická tvrzení platí pro konkávní a ryze konkávní funkce.

Definice. Funkce f má v bodě c *inflexní bod*, pokud existuje $f'(c)$, f je spojitá v c a existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $(c-\delta, c)$ ryze konkávní a na $(c, c+\delta)$ ryze konvexní, nebo naopak (konvexní–konkávní).

Je dobré zde poznamenat, že existují různé neekvivalentní definice inflexního bodu; my se budeme držet této. Z výše uvedených vět je patrné, že inflexní body lze najít pomocí vyšetření změny znaménka druhé derivace, případně změny „směru monotonie" první derivace.

Věta 4.19. *Nechť je funkce f konvexní na intervalu (a,b); pak f je na (a,b) spojitá.*

Poznámka. V předchozí větě je podstatné, že se jedná o otevřený interval. V krajních bodech uzavřeného intervalu může spojitost selhat i pro konvexní funkci. Příkladem nespojité konvexní funkce je třeba
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pokud } x \in (-1,1); \\ 2, & \text{pokud } x = -1, \text{ nebo } x = 1. \end{cases}$$
Tato funkce je definována na intervalu $[-1,1]$ a je na něm konvexní (jasné z obrázku). V krajních bodech jejího definičního intervalu však není spojitá (zprava v -1, zleva v 1), jak se můžete snadno sami přesvědčit přímo z definice. Podle předchozí věty však k takovémuto selhání spojitosti nemůže u konvexní funkce dojít ve vnitřním bodě jejího definičního oboru.

4.4 Asymptoty

Definice. Řekneme, že graf funkce $A(x) = ax + b$ je *asymptotou* f v $+\infty$, jestliže
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - A(x)) = 0.$$
Asymptotu v $-\infty$ definujeme nulovou limitou téhož rozdílu v $-\infty$.

Asymptotu chápeme jako lineární funkci, ke které se f neomezeně blíží. Při studiu asymptot se omezujeme pouze na ne-vertikální případ; nebudeme tedy například chápat osu y jako asymptotu funkce $\frac{1}{x^2}$ apod.

Věta 4.20. *Graf funkce $A(x) = ax + b$ je asymptotou f v $+\infty$, právě když*
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax). \tag{4.9}$$
V tom případě platí, že
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
Asymptota je jednoznačně určena.

Důkaz. Dokážeme postupně obě implikace. Nejprve předpokládejme, že graf lineární funkce $A(x) = ax + b$ je asymptota funkce f v $+\infty$; dokážeme rovnost (4.9). Skutečně,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b) + b) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - A(x)) + b = 0 + b,$$

kde poslední rovnost vyplývá přímo z definice asymptoty.

Na druhou stranu, platí-li (4.9), potom

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - A(x)) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) - b = b - b = 0,$$

a tedy graf funkce $A(x)$ je vskutku asymptotou f v $+\infty$.

Dokážeme ještě dodatek. Pokud platí (4.9), pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{x} = \frac{b}{\infty} + a = a. \qquad \square$$

Příklad. V praxi při hledání asymptoty nejprve spočítáme druhou limitu z Věty 4.20. Výsledné číslo je „kandidát na hodnotu a“. Teprve pokud první limita z téže věty vyjde vlastní, víme, že asymptota existuje.

Například funkce $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ má v nekonečnu asymptotu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

a dále (s dvojím použitím VOLSF)

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} y\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin y \cdot (y - \pi/2)}{\cos y} = 1 \cdot \lim_{z\to 0-} \frac{z}{-\sin z} = -1.$$

Asymptota funkce f v $+\infty$ je tedy graf funkce $A(x) = \frac{\pi}{2}x - 1$. $\triangle$

Kapitola 5

Nekonečná číselná řada

5.1 Základní fakta

Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Až dosud jsme se při studiu posloupností zabývali zejména jejich limitou

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

tedy hodnotou, ke které se členy posloupnosti s neomezenou přesností blíží. Hovoříme-li o *nekonečné řadě čísel*, zajímáme se o hodnotu (a existenci) *součtu* všech čísel a_n. Jaký přesný význam však dát součtu nekonečně mnoha čísel? Mám-li pouze N čísel $a_1, a_2, \dots, a_N$, má součet

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1} + a_N$$

všech těchto čísel jedinou možnou interpretaci: Součet dostanu tak, že k a_1 přičtu a_2, k výsledku dále přičtu a_3 a tak dále, až po konečně mnoha krocích dojdu k a_N a jeho přičtením dostanu celkový výsledek. (Díky komutativitě a asociativitě sčítání při tom nezáleží, v jakém pořadí jednotlivá čísla přičítám, stejně jako v samoobsluze nezáleží na tom, v jakém pořadí vám prodavač namarkuje zboží.)

To nám dává nápovědu, jak interpretovat symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \; :$$

Budu prostě přičítat další a další členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a doufat, že mezivýsledky (částečné součty), které budu tímto způsobem dostávat, konvergují k nějaké limitě; tuto limitu – existuje-li – pak nazvu součtem nekonečné řady. Takto opravdu součet řady budeme definovat:

Definice. Je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, *nekonečnou řadou* nazýváme formální symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{5.1}$$

místo něhož zavádíme též symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{a podobně;}$$

jakým písmenem označujeme index „podle něhož se sčítá“, na tom nezáleží. Čísla $a_1, a_2, \ldots$ jsou *členy řady* (5.1).

Je-li dána nekonečná řada (5.1), definujeme její *posloupnost částečných součtů* takto:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{atd.}; \quad \text{obecně} \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Existuje-li limita částečných součtů

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N, \tag{5.2}$$

nazýváme toto číslo s *součtem* řady (5.1); píšeme pak

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

a symbolem (5.1) pak rozumíme nejen řadu samotnou (podobně jako symbolem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme posloupnost), nýbrž i její součet s.

Pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme že řada (5.1) je *konvergentní* (má vlastní součet); pokud limita (5.2) neexistuje nebo je nekonečná, říkáme, že řada je *divergentní*.

Máme-li posloupnost indexovanou od jiného počátečního indexu než $n = 1$, například od $n = 0$, vše je definováno analogickým způsobem: Je-li například dána posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ (indexovaná od $n = 0$) a my chceme definovat součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, je potřeba použít částečné součty tvaru $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

Poznámka.

- Všimněme si, že definice počítá nejen s možnostmi konečné i nekonečné hodnoty součtu (jak bychom asi při sčítání nekonečně mnoha čísel očekávali), ale i s možností neexistence jakéhokoliv součtu. Například pro řadu

$$(-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

  jsou částečné součty následující:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \quad \text{atd.},$$

  tvoří tedy posloupnost $-1, 0, -1, 0, \ldots$, která nemá limitu, a součet řady proto neexistuje.

- Definice součtu nekonečné řady je dosti názorná; ještě názornější je však následující zápis, který platí v případě, že řada má (konečný nebo nekonečný) součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} s_N \overset{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \right).$$

  V limitě na pravé straně si lze představit, že horní mez sumy „běží do ∞“, takže sčítáme více a více členů řady, a sledujeme, k čemu se součty blíží.

Příklad. Pro začátečníka může být obtížně představitelné, že součet nekonečně mnoha čísel je konečný. Následující příklad ukazuje, že skutečně existují konvergentní nekonečné řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Součet této řady je skutečně roven jedné, což lze snadno pochopit, když si člověk uvědomí, že přičtením každého dalšího členu se hodnota částečného součtu přiblíží k 1 o polovinu zbývající vzdálenosti:

Začínáme s $s_1 = \frac{1}{2}$; vzdálenost od 1 je $\frac{1}{2}$ a hodnota dalšího členu řady je $\frac{1}{4}$, tedy polovina této vzdálenosti. Ve druhém kroku máme $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, takže vzdálenost od 1 je $\frac{1}{4}$ a hodnota dalšího členu řady je $\frac{1}{8}$, tj. jedna polovina této vzdálenosti. A tak dále. Odtud je jasně vidět, že limita částečných součtů (tj. hodnota součtu řady) je přesně 1, a je to tedy konečné číslo. △

Nyní si tento výsledek dokážeme ve větší obecnosti a přesně (tedy bez zbytečných odkazů na intuici).

Příklad (Geometrická řada)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Pak platí rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{5.3}$$

Tuto řadu nazýváme *geometrickou řadou s kvocientem q*. Definujeme-li na okamžik $0^0 = 1$, pak tato rovnost platí pro $q \in (-1, 1)$. △

Poznamenejme, že v tomto případě (na rozdíl od předchozího příkladu) n běží od 0 a nikoliv od 1. Samozřejmě jde pouze o kosmetickou změnu; díky ní máme o něco elegantnější vzoreček.

Důkaz. Platí (dokonce pro libovolné q) následující rovnost (jak si každý může snadno ověřit – roznásobením vznikne „teleskopická řada“, tj. součet, kde většina členů se odečte): $1 - q^{N+1} = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^N)$. Odtud

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}.$$

Máme tedy vzorec pro N-tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ a dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{N\to\infty} \left(1 - q^{N+1}\right) = \frac{1}{1-q}(1-0) = \frac{1}{1-q}. \qquad \square$$

Příklad. $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 1$. Skutečně, použitím vzorce odvozeného výše dostáváme

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 1. \qquad \triangle$$

Je ovšem celkem jasné, že ne všechny nekonečné řady mají konečný součet (několik příkladů uvádím níže).

Příklad (Konvergentní řady)**.** Řad pro které jsme (podobně jako pro geometrickou řadu) schopni zjistit konkrétní hodnotu součtu není mnoho – obvykle se spokojíme se zjištěním, že součet je například konečný – jedna další taková řada je ale následující; rovnou uvádíme i (trikový) výpočet hodnoty jejího součtu:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &\overset{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Následují dva další slavné příklady konvergentních řad i s jejich součty uvádím bez důkazu jen pro zajímavost. (Ve druhém případě sčítáme od $n = 0$; připomeňme tedy, že $0!$ definujeme jako 1.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \qquad \triangle$$

Příklad (Divergentní řady). • $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$. Skutečně, N-tý částečný součet s_N této řady je totiž roven součtu N jedniček, tj. číslu N. Platí tedy $\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} N = \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots = \infty$. Tato řada diverguje do nekonečna „ještě rychleji“; chceme-li, můžeme pro důkaz její divergence použít srovnávací kritérium (viz dále) – tato řada je totiž zjevně „větší“ než divergentní řada z předchozího bodu. Alternativně můžeme použít známý „Gaussův“ vzorec pro N-tý částečný součet této řady: $s_N = 1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$. (Důkaz tohoto vzorce je oblíbené a snadné cvičení na matematickou indukci.) Je vidět, že $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$, řada tedy diverguje.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ diverguje. Podíváme-li se totiž na posloupnost částečných součtů této řady, vidíme, že je to $-1, 0, -1, 0, \ldots$, což je (jak víme) posloupnost, která nemá limitu. (Kdyby totiž měla limitu $A \in \mathbb{R}^*$, musely by podle věty o limitě vybrané posloupnosti konvergovat k A jak liché členy, tak i sudé členy. My ale vidíme, že liché členy konvergují k -1 a sudé členy k 0.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ rovněž diverguje, a to z podobného důvodu jako v předchozím bodě: její součet neexistuje. Důkaz tohoto faktu je však poněkud méně triviální a zde ho vynecháme. $\triangle$

Věta 5.1 (Nutná podmínka konvergence). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. To, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, podle definice znamená, že existuje limita částečných součtů:

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

My ale víme, že „posloupnost a posunutá posloupnost mají stejnou limitu“, takže platí $\lim_{N\to\infty} s_{N-1} = s$. Odtud

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} (s_N - s_{N-1}) = \lim_{N\to\infty} s_N - \lim_{N\to\infty} s_{N-1} = s - s = 0. \qquad \square$$

Následující příklad ukazuje, že ani řada, jejíž členy konvergují k nule (tj. splňuje nutnou podmínku konvergence), nemusí být konvergentní (tj. mít konečný součet).

Příklad 5.2 (Harmonická řada). Takzvaná harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Přesněji, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

Protože však zároveň víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, vidíme, že v předchozí větě platí pouze jedna implikace. Jinými slovy, není pravda, že když se členy řady blíží k nule, musí mít řada konečný součet. $\triangle$

Důkaz divergence harmonické řady. Máme dokázat, že

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots=\infty.$$

Všimněme si, že první dva členy jsou nejméně tak velké jako $\frac{1}{2}$, to jest $1 \geqslant \frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$. Všechny další členy jsou sice menší než jedna polovina, ale následující dva členy jsou oba aspoň tak velké jako $\frac{1}{4}$, to jest $\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$, a tedy součtem těchto dvou členů dostaneme $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Podívejme se nyní na členy od $\frac{1}{5}$ dále; ty už jsou sice menší než $\frac{1}{4}$, ale následující 4 členy jsou větší než $\frac{1}{8}$, a jejich součet proto splňuje $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geqslant 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Obrázkem:

$$\underbrace{1}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\ldots$$

Vidíme tedy, že 2^N-tý částečný součet je $\geqslant (N+1)\cdot\frac{1}{2}$ (třeba o řádek výše vidíme, že $s_{2^4} = s_{16} \geqslant (4+1)\cdot\frac{1}{2}$). Odtud plyne (vezměme ještě v úvahu to, že posloupnost částečných součtů je rostoucí, neboť všechny členy naší řady jsou kladné) pomocí Lemmatu o jednom policajtovi pro posloupnosti, že $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$. □

Věta 5.3 (Základní vlastnosti součtu řady)**.** *Nechť jsou dány řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *a čísla* $c \in \mathbb{R}$ *a* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Pak platí:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$*, má-li jedna strana součet.*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, má-li pravá strana součet.*

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, má-li pravá strana součet.*

Důkaz. Všechny body jsou snadná cvičení (zejména na aritmetiku limit); pro ilustraci dokážeme první bod věty. Označme s_N částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$. Pak pro $n > n_0$ máme

$$s_N = a_1+a_2+\ldots+a_N = (a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{N} a_n,$$

přičemž si můžeme všimnout, že součty $\sum_{n=n_0+1}^{N} a_n$ jsou přesně částečné součty řady $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$. Pokud tedy na obou stranách rovnice přejdeme k limitě pro $N \to \infty$, dostaneme požadované

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left((a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{N} a_n\right)$$

$$= (a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=n_0+1}^{N} a_n = (a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n. \qquad \square$$

Poznámka. • Z bodu (i) je jasně vidět, že konvergence řady (tedy otázka, zdá má, či nemá konečný součet) nezávisí na hodnotách konečně mnoha členů. Tohoto faktu budeme hojně využívat bez dalších komentářů. Jedním z důsledků je, že když nějaké tvrzení (třeba kritérium konvergence) platí pro řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, platí i pro řady tvaru $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ apod.

Zároveň je jasné, že prvních konečně mnoho (v našem případě přesně n_0) členů mohu libovolným způsobem „uzávorkovat" a mohu také libovolným způsobem měnit jejich pořadí. To je zcela jasné, neboť součet konečně mnoha čísel, a tedy také součet $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0})$ je stejný bez ohledu na tyto změny.

- Body (ii) a (iii) předchozí věty říkají, že součet řady funguje lineárním způsobem: „suma součtů je součet sum" a „suma násobků konstantou je násobek konstantou sumy".

- Všimněte si, že v předchozí větě místo „má-li jedna strana smysl" (případně „má-li pravá strana smysl") píšu „má-li jedna strana součet". Jedná se pouze o formální a nepříliš podstatný rozdíl. Důvodem pro něj je, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemusí mít součet, ale symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v každém případě smysl má: kromě součtu oné řady (který ovšem nemusí existovat), totiž označuje i řadu samu. Tento rozdíl je málokdy podstatný, a v následujícím tedy už na něj nebudeme upozorňovat. Aspoň jednou je ale dobré vzít na vědomí, že třeba v prvním bodě Věty 5.3 by předpoklad „má-li jedna strana smysl" byl prázdný (tj. k ničemu), protože levá strana uvedené rovnosti má smysl v každém případě, a to minimálně jako symbol označující onu řadu.

- Standardní poznámka vztahující se k bodu (iii) je, že budeme-li předpokládat $c \neq 0$, pak ona rovnost platí dokonce za slabšího předpokladu, že *jedna strana má součet*. Skutečně, pokud totiž víme, že zrovna pravá strana součet má, plyne rovnost přímo z formulace uvedené ve Větě 5.3. Na druhou stranu, víme-li, že levá strana má součet a $c \neq 0$, pak můžeme počítat takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} \cdot c a_n\right) = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} c a_n,$$

kde druhá rovnost platí opět přesně podle Věty 5.3, protože pravá strana této rovnosti má součet (díky našemu předpokladu, že levá strana dokazované rovnosti, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, má součet). Odtud ihned plyne, že

$$c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n.$$

Příklad. Porovnejme následující tři uzávorkování téže řady $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$:

- $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ nemá součet;
- $(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$;
- $1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

Pokud se tedy při „závorkování" neomezíme na konečně mnoho členů, součet se může změnit. Změna pořadí sčítání, která se neomezí na pouhých konečně mnoho členů také může mít vliv na existenci a hodnotu součtu:

- $1 + (-1) + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) + \ldots = \infty$;
- $1 + (-1) + 1 + (-1) + (-1) + 1 + \ldots = -\infty$. $\triangle$

5.2 Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

V této části se zaměříme na řady s nezápornými členy, tj. na řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňující $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$. Všimněme si hned, že takovéto řady vždy mají dobře definovaný součet; posloupnost částečných součtů je totiž evidentně neklesající (každý další částečný součet je o nezáporné číslo větší), a tedy její limita (tj. součet řady) existuje. Otázka ovšem je, jestli je tato limita konečná či nekonečná.

Věta 5.4 (Srovnávací kritérium)**.** *Buďte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dvě řady s nezápornými členy, které splňují $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n$. Pak platí:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní majoranta*.)*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.
(Říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní minoranta*.)*

Důkaz. Dokážeme nejdříve první bod věty; předpokládejme tedy, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Chceme dokázat, že totéž platí pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. že má konečný součet. To jsou dvě informace: má součet a tento součet je konečný.

Existence součtu plyne z nezápornosti sčítanců; částečné součty jsou díky tomu neklesající. Přesněji: pro libovolné n je $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$, protože $a_{n+1} \geqslant 0$. My ovšem víme (Věta 2.14), že libovolná monotónní posloupnost má limitu. To znamená, že existuje limita $\lim_{n\to\infty} s_n$, tj. součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nyní si uvědomíme, že součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konečný. Podle předpokladu je $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leqslant b_n$, odkud snadno plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n =: S_n.$$

Podle Věty o limitě a nerovnostech (Věta 2.13) tedy dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Tím je dokončen důkaz prvního bodu věty. K důkazu druhého bodu si stačí uvědomit, že implikace v něm uvedená je pouhou obměnou implikace z bodu prvního, a je tedy ekvivalentní (takže platí, jak jsme právě dokázali). □

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní. Skutečně, pro libovolné $n \geqslant 2$ totiž platí nerovnost

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)n}.$$

Dříve jsme trikem zjistili, že konverguje (k součtu 1) řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}.$$

Podle Srovnávacího kritéria tedy platí, že $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, a tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (a má podle Věty 5.3 právě o 1 větší, ovšem stále konečný, součet). △

Poznámka. Podle Věty 5.3 (i) konvergence nezáleží na konečně mnoha členech. Je tedy zřejmé, že ve Větě 5.4 stačí předpokládat, že rovnost $a_n \leqslant b_n$ je splněna pro všechna n od jistého n_0 počínaje. Tj. věta platí i za slabšího předpokladu, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 : a_n \leqslant b_n$.

Věta 5.5 (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Buďte* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *řady s nezápornými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

(i) $A \in (0,\infty) \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje}\right)$;

(ii) $A = 0 \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje}\right)$;

(iii) $A = \infty \Longrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje}\right)$.

Důkaz. Nebudeme se řídit přesnou formulací věty; dokážeme něco trochu jiného a pak si uvědomíme, že věta z našich postřehů snadno plyne. Nejprve dokážeme následující tvrzení:

Pokud $A < \infty$, pak platí implikace $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$. Nechť tedy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a opravdu $A < \infty$, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A < \infty$. Podle definice limity posloupnosti existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_0 : \frac{a_n}{b_n} < A + 1, \quad \text{neboli} \quad a_n < (A+1)b_n \tag{5.4}$$

(za ε si můžeme zvolit 1; víme, že příslušné n_0 musí existovat). Protože podle Věty 5.3 platí, má-li pravá strana součet, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A+1)b_n = (A+1)\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

a pravá strana této rovnice je konečná (podle předpokladu konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$), vidíme, že $\sum_{n=1}^{\infty}(A+1)b_n$ konverguje. Podle (5.4) (kde odhad platí počínaje indexem n_0!) a srovnávacího kritéria (Věta 5.4) dostáváme, že konverguje

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \quad \text{a tedy podle Věty 5.3 (i) konverguje i řada} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dále si uvědomíme, že pokud $A > 0$, pak platí implikace $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right)$. Skutečně, jest $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, neboli (podle aritmetiky limit) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{A} < \infty$. Nyní můžeme použít tvrzení dokázané v první částí důkazu s tím, že posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ si přehodí svoje role. Ihned tak dostáváme požadovanou implikaci.

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že všechny tři body věty snadno plynou z uvedených (a dokázaných) dvou pozorování. Nemám pochyb o tom, že to už si rozmyslíte sami. □

Příklad.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ srovnej s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, která konverguje (viz výše);
- $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n^2}$ srovnej s $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje (Příklad 5.2).
- Další jednoduché příklady na Větu 5.5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$ (srovnej s harmonickou řadou), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi/n)$. △

Následující kritéria konvergence (odmocninové a podílové) jsou založena na srovnání (pomocí srovnávacího kritéria) s geometrickou řadou. Z toho vyplývá, že tato kritéria lze s úspěchem použít pouze na řady, které „konvergují velmi rychle“, a sice aspoň tak rychle jako některá konvergentní geometrická řada. Jak uvidíme, tato kritéria neumí například rozhodnout o (nám už známé) konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 5.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Buď dána řada s nezápornými členy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Nechť existuje pevné číslo* $q < 1$ *takové, že* $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leqslant q$. *Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Jsou-li splněny předpoklady věty, pak $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leqslant q^n$. Je jasné, že $q \in [0, 1)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (umíme dokonce spočítat hodnotu součtu; pozor ale na počáteční index). Podle Věty 5.4 tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Poznámka (O důležité roli $q < 1$)**.** Na tomto místě je dobré si uvědomit, že z předpokladů Cauchyova kritéria nelze jen tak vypustit ono $q < 1$. Uvažujme dvě varianty tohoto předpokladu, které zde přichází v úvahu:

(A) $\exists q < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leqslant q$;

(B) $\qquad \forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Už víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje za předpokladu (A) (přesně to je obsahem právě dokázané Věty 5.6); je také jasné, že (A) $\Rightarrow$ (B); předpoklad (B) je tedy slabší. Ukážeme, že nahradíme-li předpoklad (A) slabším předpokladem (B), věta přestane platit. Jinými slovy, zatímco (A) konvergenci implikuje, (B) ji neimplikuje.

Skutečně, uvažujme $a_n = \frac{1}{n+1}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je posunutá harmonická řada: místo sčítancem 1 začínáme sčítat od $\frac{1}{2}$ a dál už je to stejné. Jak víme, konečně mnoho členů nemá na konvergenci/divergenci vliv, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, stejně jako harmonická řada.

Je ale jasné, že pro všechna n platí $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} < 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ tedy splňuje (B), ale není konvergentní. To znamená, že (B) neimplikuje konvergenci, jak jsme chtěli ukázat.

Tím je vlastně všechno jasné: (A) konvergenci zaručuje, zatímco (B) ne; role onoho $q < 1$ je tedy opravdu důležitá. Zároveň jasně vidíme, že předpoklady (A) a (B) nejsou ekvivalentní, a opačná implikace mezi nimi, tedy (A) $\Leftarrow$ (B) nemůže platit. To jinými slovy znamená, že (B) je ostře slabší předpoklad než (A).

Nicméně bych se nedivil, kdyby takovéto vysvětlení někoho neuspokojilo. V čem se (A) a (B) tak liší, že tento zdánlivě drobný rozdíl rozhoduje o platnosti matematické věty? Abychom si tento rozdíl lépe uvědomili, označme $d_n = \sqrt[n]{a_n}$ a podívejme se na tuto posloupnost přímo, bez přemýšlení o konvergenci řad. Při tomto značení vypadají předpoklady (A) a (B) následovně:

(A) $\exists q < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}: d_n \leqslant q$;

(B) $\qquad \forall n \in \mathbb{N}: d_n < 1$.

Jak se může stát, že nějaká posloupnost nezáporných čísel splňuje (B), ale nikoliv silnější předpoklad (A)? Docela snadno, stačí k tomu libovolná nezáporná rostoucí posloupnost s limitou 1, třeba $d_n = \frac{n}{n+1}$. Opravdu je jasné, že tato posloupnost splňuje (B). Že nesplňuje (A), je také jasné, a to každému, kdo pochopil definici limity. Vezmu-li si libovolné číslo $q < 1$, třeba $q = \frac{9}{10}$ nebo $q = \frac{999}{1000}$ atd., od jistého indexu dále už posloupnost d_n bude nad touto hranicí. Takže d_n nesplňuje (A).

Abychom v běžné řeči snadno odlišili situace podobné předpokladu (A) od (B), hovoříme v případě (A), že čísla d_n jsou *odražená od jedničky*. To znamená, že existuje jisté netriviální okolí čísla 1, v němž se nevyskytuje žádné číslo d_n.

Poznamenejme ještě, že nesplnění podmínky (A) neimplikuje divergenci řady. Podívejte se na konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; zjistíte, že kritérium (předpoklad (A)) nesplňuje, ale přesto konverguje. Podrobněji o tom níže.

Věta 5.7 (Limitní Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Buď dána řada s nezápornými členy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Pak platí:*

(i) *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Předpokládejme, že $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Označme $q = \frac{L+1}{2}$ (aritmetický průměr L a 1); potom $L < q < 1$. Podle definice limity (pro $\varepsilon = q - L > 0$) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové že pro všechna $n \geqslant n_0$ jest $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = q < 1$. Tedy podle Věty 5.6 konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, a tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nyní předpokládejme, že $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Z definice limity ihned plyne, že od jistého indexu n_0 platí $\sqrt[n]{a_n} > 1$, a tedy i $a_n > 1$. Tím pádem není splněna nutná podmínka konvergence, tj. neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a řada tedy diverguje podle Věty 5.1. □

Poznámka.

(a) Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nevíme nic, tj. můžou nastat obě možnosti. Skutečně:

- Nechť $a_n = \frac{1}{n}$; pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ a (jak dávno víme) řada diverguje;
- Nechť $a_n = \frac{1}{n^2}$; pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ a (jak dávno víme) řada konverguje;

(b) Uvedená limita vůbec nemusí existovat. V tom případě se můžeme pokusit použít přímo Větu 5.6 (tedy „nelimitní verzi“), případně její snadnou úpravu „s počátečním indexem n_0“:
Jestliže $\exists q < 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Příklad (Argumentace kruhem)**.** Uvažujme $q \in (0, 1)$; pak $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je nějaká konvergentní geometrická řada. Můžeme zkusit použít Větu 5.7:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q^n} = \lim_{n\to\infty} q = q < 1,$$

takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ skutečně podle Věty 5.7 konverguje. Když už máme limitní Cauchyovo kritérium, je obtížné tento argument popírat, jedná se ale o argument kruhem: Abychom totiž mohli ono kritérium dokázat, *nejdřív potřebujeme vědět, že geometrická řada konverguje*; nedává tedy smysl použitím tohoto výsledku zpětně dokazovat konvergenci geometrické řady.

Z cvičných důvodů si můžete zkusit rozmyslet, proč je tato situace velmi podobná výpočtu limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 6.2). △

Věta 5.8 (D'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Buď dána řada s nezápornými členy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Nechť existuje pevné číslo* $q < 1$ *takové, že* $\forall n \in \mathbb{N} \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$. *Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Všimněme si nejprve, že z nezápornosti a_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ plyne, že $q \geqslant 0$, tj. $q \in [0, 1)$.

Podle předpokladu (pro $n = 1$) platí $\frac{a_2}{a_1} \leqslant q$, takže $a_2 \leqslant a_1 q$. Dále ovšem ($n = 2$) platí také $\frac{a_3}{a_2} \leqslant q$, odkud $a_3 \leqslant a_2 q \leqslant a_1 q^2$ atd. Odtud je už snadné nahlédnout, že asi platí následující výrok, který přesně dokážeme indukcí:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon a_{n+1} \leqslant a_1 q^n. \tag{5.5}$$

Skutečně, k důkazu indukcí nám stačí nerovnost ověřit pro $n = 1$ (což už jsme učinili) a dokázat, že z platnosti nerovnosti pro n plyne její platnost také pro $n + 1$ (tj. „indukční krok“). Předpokládejme tedy, že pro jisté $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{n+1} \leqslant a_1 q^n$. Pak podle předpokladu věty a podle indukčního předpokladu postupně dostaneme

$$a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \cdot q \leqslant a_1 q^n \cdot q = a_1 q^{n+1},$$

tedy $a_{n+2} \leqslant a_1 q^{n+1}$, což jsme chtěli ověřit, a (5.5) tedy platí.

Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ jsme tedy našli konvergentní majorantu $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ (jde o geometrickou řadu s kvocientem $q \in [0, 1)$, která je konvergentní – dokonce známe přesnou hodnotu jejího součtu: $\frac{a_1 q}{1-q} < \infty$). Podle srovnávacího kritéria (Věta 5.4) tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, a konverguje proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Věta 5.9 (Limitní D'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Buď dána řada s nezápornými členy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Pak platí:*

(i) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Důkaz této věty je velmi podobný důkazu Věty 5.7, pouze místo Cauchyova kritéria použijeme D'Alembertovo. □

Poznámka. Pro (právě uvedené) podílové kritérium platí analogická poznámka jako pro kritérium odmocninové. Je dobré mít na paměti, že obě kritéria, tedy Věta 5.6 i Věta 5.8 (resp. jejich limitní verze) fungují pouze na řady, ve kterých se vyskytují velmi rychle rostoucí nebo klesající členy, protože jejich důkaz využívá „srovnání" (pomocí srovnávacího kritéria) s nějakou konvergentní geometrickou řadou. Tím pádem žádná konvergentní řada, která se nedá s úspěchem srovnat s nějakou geometrickou, nemůže být vyšetřena použitím žádného z těchto kritérií.

Vzhledem k inherentnímu omezení odmocninového a podílového kritéria byla vynalezena další, silnější kritéria konvergence. Jejich formulace je však také poněkud složitější a aplikace obtížnější. Pro zajímavost uveďme tak zvané Raabeovo kritérium konvergence:

Buď dána řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

(i) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

5.3 Řady s obecnými členy – absolutní a neabsolutní konvergence

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Řekneme, že řada je *relativně konvergentní* (též: *neabsolutně konvergentní*), jestliže je konvergentní, ale není absolutně konvergentní.

Věta 5.10. *Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

K důkazu použijeme následující šikovné značení:

Značení. Je-li $a \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, definujeme

$$a^+ = \max\{0, a\} \quad \text{a} \quad a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Je snadno vidět, že platí následující:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant a^+ \leqslant |a|, \quad 0 \leqslant a^- \leqslant |a|, \\ &a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-. \end{aligned}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, tj. že konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n^+ \leqslant |a_n| \quad \text{a} \quad a_n^- \leqslant |a_n|;$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je tedy konvergentní majoranta jak pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ tak i pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Obě řady tedy konvergují (tj. mají konečný součet) podle srovnávacího kritéria. Nyní pomocí Věty 5.3 odvodíme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < \infty. \qquad \square$$

Příklad. Rozhodněme o konvergenci řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$.

Použijeme předchozí větu: První z obou řad je absolutně konvergentní, neboť $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní. Podle Věty 5.10 je tedy i konvergentní (v obyčejném slova smyslu).

Obdobně postupujeme i pro druhou řadu, nejprve ale použijeme Větu 5.4 (srovnávací kritérium):

$$\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n};$$

protože geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ je konvergentní, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{2^n}\right|$. To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ je absolutně konvergentní, a tedy i konvergentní (opět podle Věty 5.10). Všimněte si, že jsme použili obyčejné (ne limitní) srovnávací kritérium; s limitním bychom nepořídili, neboť příslušná limita neexistuje (jak se můžete snadno přesvědčit). △

Poznámka. Věta 5.10 říká, že absolutní konvergence implikuje konvergenci; jde tedy o silnější vlastnost. Od tohoto okamžiku se tedy domluvme, že nemusíme pokaždé explicitně konstatovat, že řada je konvergentní, víme-li už, že je absolutně konvergentní. Budeme to považovat za samozřejmé; ostatně i terminologie, kterou používáme, je pro toto chápání vhodná.

Věta 5.11 (Leibnizovo kritérium). *Budiž $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.*

Důkaz. Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \geqslant \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tj. všechna čísla a_n jsou nezáporná. Označme posloupnost částečných součtů studované řady takto:

$$s_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k.$$

Ukážeme, že posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu.

Skutečně: protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, jest pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $-a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0$, a tedy

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant s_{2n},$$

takže posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Navíc je zdola omezená, protože (s opětovným využitím faktu, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí) snadno vidíme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geqslant -a_1.$$

Podle Věty 2.14 tedy dostáváme, že existuje vlastní limita $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \in \mathbb{R}$. Protože však platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s - 0 = s.$$

Protože vybraná posloupnost „lichých členů“ (tj. členů s lichým indexem) má stejnou limitu jako vybraná posloupnost členů sudých, snadno se ukáže, že $\lim_{n\to\infty} s_n = s < \infty$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ má konečný součet s, a jsme hotovi. □

Příklad. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je relativně konvergentní.

- Každý se snadno přesvědčí, že řada není absolutně konvergentní.
- Řada ale je konvergentní (a je tedy relativně konvergentní). Skutečně, položíme-li $a_n = \frac{1}{n}$, pak posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje předpoklady Leibnizova kritéria (je klesající a má limitu 0). Tím pádem konverguje řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n},$$
což je přesně vyšetřovaná řada.

Vidíme tedy, že ne každá konvergentní řada je absolutně konvergentní, a tedy absolutní konvergence je ostře silnější vlastnost než konvergence. Ve Větě 5.10 tedy neplatí opačná implikace. △

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$. Označme $a_n = (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$.

Podívejme se nejprve na absolutní konvergenci (někde se začít musí a často není jasné, které pořadí je výhodnější):
$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}\right| = \frac{2+(-1)^n}{n} \geqslant \frac{1}{n}.$$
Našli jsme tedy divergentní minorantu, a to harmonickou řadu. Naše řada tedy nekonverguje absolutně.

Vyšetřeme nyní (relativní) konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Počítejme:
$$a_n = (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n \cdot 2 + 1}{n} = \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{2}{n}.$$
Podívejme se na řadu odpovídající druhému sčítanci na pravé straně poslední rovnice. Snadno zjistíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n}$ konverguje podle Leibnizova kritéria, protože $\frac{2}{n}$ je klesající a má limitu 0.

Dostáváme nyní následující výpočet, v němž druhá rovnost označená $(*)$ platí podle Věty 5.3 vzhledem k tomu, že její pravá strana má součet; poslední rovnost pak plyne z toho, že se jedná o součet konečného čísla $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n}$ (jak jsme zjistili výše) a nekonečna (součet harmonické řady):
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{2}{n} \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n} = \infty.$$
Řada tedy diverguje.

Vidíme, že první část, tedy vyšetřování absolutní konvergence, jsme si mohli odpustit, neboť (obměnou implikace) Věta 5.10 říká, že divergentní řada není absolutně konvergentní – závěr první části (totiž fakt, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není absolutně konvergentní) tedy automaticky plyne ze závěru části druhé (tj. z toho, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není konvergentní). Odhadnout, zda se více vyplatí začít absolutní konvergencí nebo konvergencí, vyžaduje jisté zkušenosti a často na tom navíc nezáleží, neboť k úplnému řešení jsou potřeba obě části (to nastane právě pro každou relativně konvergentní řadu). △

5.4 Přerovnání řady

Definice. Budiž $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ posloupnost přirozených čísel, ve které se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou (tj. jde o bijekci $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$, tj. jde o „permutaci“ na $\mathbb{N}$). Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 5.12. *Nechť je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní. Pak i každé její přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *je absolutně konvergentní a platí rovnost součtů, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Věta 5.13 (Riemannova)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relativně konvergentní. Pak pro libovolné* $s \in \mathbb{R}^*$ *existuje přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *takové, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$.

Důkazy obou vět vynecháme.

Kapitola 6

Další témata

6.1 L'Hospitalovo pravidlo

V této části si dokážeme tak zvané l'Hospitalovo pravidlo. To může být užitečným nástrojem při výpočtech některých limit a později (v dalším semestru) ho použijeme také k důkazu Taylorovy věty.

Nyní se chystáme dokázat takzvanou Cauchyovu větu o střední hodnotě; jde v podstatě o silnější verzi nám již známé věty Lagrangeovy (Věta 4.13); proto čtenáři doporučuji si nejprve tuto větu připomenout, aby si obě věty lépe propojil.

Věta 6.1 (Cauchyova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť jsou funkce f, h spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť mají vlastní derivaci na (a, b). Navíc předpokládejme, že $\forall x \in (a, b)\colon h'(x) \neq 0$.*

Za těchto předpokladů existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci F následujícím předpisem

$$F(x) = \big(f(b) - f(a)\big)h(x) - \big(h(b) - h(a)\big)f(x).$$

Ověříme, že F na intervalu $[a, b]$ splňuje předpoklady Rolleovy věty: Funkce F je evidentně spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b). Ověříme, že $F(a) = F(b)$; skutečně,

$$\begin{aligned}\big(f(b) - f(a)\big)h(a) - \big(h(b) - h(a)\big)f(a) = f(b)h(a) - h(b)f(a). \\ = \big(f(b) - f(a)\big)h(b) - \big(h(b) - h(a)\big)f(b)\end{aligned}$$

Rolleova věta garantuje existenci bodu $\xi \in (a, b)$ takového, že $F'(\xi) = 0$, tj.

$$0 = F'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)h'(\xi) - \big(h(b) - h(a)\big)f'(\xi),$$

a tedy

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

□

Věta 6.2 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z následujících podmínek.*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$;

(ii) $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Potom následující rovnost platí, má-li její pravá strana smysl:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. Čtenář zajisté již ví, že při splnění podmínky (i) hovoříme o l'Hospitalovu pravidlu $\frac{0}{0}$, zatímco podmínka (ii) odpovídá tomu, co se někdy označuje $\frac{\cdot}{\infty}$, tedy „cokoliv lomeno nekonečnem". Pochopitelně nejde doopravdy o podíl nul, ale funkcí, které se k nule limitně blíží.

L'Hospitalovo pravidlo může v mnoha případech výrazným způsobem zjednodušit výpočty limit, může však také komplikovat jinak vcelku snadnou situaci. Často je vhodné aplikaci l'Hospitalova pravidla kombinovat s elementárními metodami výpočtu limit, které už známe.

Je také řada případů, kdy limita sice l'Hospitalovým pravidlem vyčíslit lze, a to dokonce snadno, je to však proti dobrému vkusu (často takový výpočet představuje argumentaci kruhem); například:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Toto je sice korektní aplikace, využíváme však při ní znalost derivace funkce sin, o které počítaná limita sama vypovídá (skutečnost, že ona limita je rovna 1 znamená přesně to, že derivace sinu v nule je 1). Skoro všechny „známé limity" se dají takto „vypočítat" pomocí l'Hospitalova pravidla.

Dále je potřeba dát si pozor na to, že ve formulaci věty stojí „má-li pravá strana smysl"; jinak řečeno, věta se nevztahuje na situace, v nichž pravá strana smysl nemá – tj. „neříká o takových situacích nic". To znamená, že když nám po aplikaci l'Hospitalova pravidla vyjde nesmysl (třeba neexistující limita), nemůžeme z toho učinit závěr, že původní limita neexistuje; místo toho se musíme vrátit (minimálně) před poslední aplikaci věty, která předpoklad smysluplnosti pravé strany zahrnuje, a pokusit se pokračovat jinak.

A ještě jedno varování: Nepleťte si l'Hospitalovo pravidlo, kde derivujeme čitatele a jmenovatele zvlášť, s derivací podílu:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{ale} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Příklad. Následující limita je „typu $\frac{0}{0}$", můžeme tedy zkusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo (a skutečně dojdeme k výsledku):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{-1}{6};$$

pravá strana má smysl, takže použití l'Hospitalova pravidla bylo oprávněné, a výpočet je korektní.

Příklad. Další příklad je snadné spočítat elementární metodou vytknutí převládajícího členu (x) a aplikací faktu „nulová · omezená = nulová"; výsledek je 1. Limita je navíc „typu $\frac{\cdot}{\infty}$", takže můžeme také zkusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo; limita na pravé straně však neexistuje, jak je snadno vidět:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

Limita nalevo tedy existuje (je rovna jedné) a limita napravo neexistuje. Rovnost označená „L'H“ tak přece jen neplatí; vysvětlením je, že její pravá strana nemá smysl, což je situace, o níž nám l'Hospitalovo pravidlo neříká nic (zejména netvrdí, že by platila ona rovnost označená „L'H“).

Podobný příklad, ve kterém l'Hospitalovo pravidlo selže na neexistenci pravé strany, je limita

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Můžete se snadno přesvědčit, že její hodnota je 0, nicméně po „použití“ l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$ dostaneme limitu, která neexistuje. △

Známé limity typu $\frac{0}{0}$ je nesmysl odvozovat použitím l'Hospitalova pravidla – jak už bylo poznamenáno výše. Nicméně na následující limity (které jsou v podstatě součástí naší „srovnávací škály“) je to nástroj vhodný. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ můžeme počítat takto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} \overset{\text{L'H}}{=} \dots \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0, \tag{6.1}$$

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{-x^2}{x} = 0. \tag{6.2}$$

Přitom druhá z obou limit není ve tvaru zlomku, standardním trikem jsme ji však do takového tvaru převedli – viz též odstavec níže. Všimněte si též toho, že jde o limitu v nule zprava: funkce logaritmus je totiž definována pouze pro kladná čísla, takže oboustranná limita této funkce neexistuje.

Poznámka. Mimochodem výše uvedené „známé“ limity (6.1) a (6.2) jsou v zásadě ekvivalentní, tj. v podstatě se dají jednoduchou substitucí převést jedna na druhou. A samozřejmě se dají odvodit i jinými způsoby - bez l'Hospitalova pravidla. Pojďme si nejprve rozmyslet onu ekvivalenci obou limit: Kupříkladu předpokládejme, že máme dokázanou rovnost (6.1) a náš cíl je dokázat, že

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = 0.$$

Budeme chtít použít „substituci“ tvaru $y = e^{-x}$, kde $x \to \infty$. To dává dobrý smysl, neboť opravdu $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ a funkce e^{-x} je kladná, takže se dá dosadit do logaritmu (resp. je vyhovující v naší poněkud omezující situaci, kdy počítáme limitu *zprava* vnější funkce). Jinými slovy chceme aplikovat Větu 3.8 o limitě složené funkce s vnější funkcí $f(y)$ a vnitřní funkcí $g(x)$, kde

$$f(y) = y\cdot(\ln y)^k, \quad \lim_{y\to 0_+} f(y) = A;$$
$$g(x) = e^{-x}, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{a funkce } g \text{ je kladná.}$$

Náš cíl je zjistit hodnotu limity A a díky Větě o limitě složené funkce níže platí rovnost označená „VOLSF“. (Podmínka (P) je splněna triviálně, protože vnitřní funkce je prostá.) Dostáváme ve skutečnosti o něco obecnější výsledek (pro $k \in \mathbb{N}$), který odpovídá (6.2) po dosazení $k = 1$:

$$\lim_{y\to 0_+} y\cdot(\ln y)^k = \lim_{y\to 0_+} f(y) \overset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\big(\ln(e^{-x})\big)^k = (-1)^k\cdot \lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} \overset{(6.1)}{=} 0.$$

V opačném směru, tedy od znalosti (6.1) k odvození (6.2) lze postupovat velmi podobným postupem (pomocí substituce $y = -\ln x$). Vidíme, že jedna rovnost lze snadnou substitucí odvodit z druhé, a obě rovnosti jsou tedy v tomto smyslu ekvivalentní.

Nyní elementárním postupem (tj. bez použití l'Hospitalova pravidla) dokážeme rovnost (6.1) (takže automaticky dostaneme i důkaz rovnosti (6.2)): Nejprve dokážeme, že limita $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}$ existuje, a v druhém kroku ukážeme, že nepřichází v úvahu jiná hodnota této limity než 0.

Existence limity: Snadno se ukáže, že funkce $x^k e^{-x}$ je na nějakém intervalu tvaru (x_0,∞) klesající (stačí vyšetřit derivaci). Protože je navíc zdola omezená (nulou), její limita existuje, je konečná a je rovna $\inf\{x^k e^{-x} : x \in (x_0,\infty)\}$; to se dá dokázat zcela stejným postupem jako analogické tvrzení (Věta 2.14) pro posloupnosti a i tuto část důkazu přenecháme čtenáři jako snadné cvičení.

Nulová hodnota limity: Nyní tedy víme, že zkoumaná limita skutečně existuje a zbývá tedy najít její hodnotu A. K tomu nám ovšem stačí do naší funkce $x^k e^{-x}$ dosadit libovolnou posloupnost splňující podmínky (H1) a (H2) z Henieho věty v nekonečnu, tj. libovolnou posloupnost s limitou ∞ – třeba standardní $x_n = n$ – a vypočítat příslušnou limitu posloupnosti. Heineho věta nám totiž říká, že pokud $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = A$ (tento předpoklad implicitně zahrnuje i existenci této limity!), pak i $\lim_{n\to\infty}(x_n)^k e^{-x_n} = \lim_{n\to\infty} n^k e^{-n} = A$. (Přičemž samozřejmě čekáme, že jest $A = 0$.)

Uvažujme proto posloupnost $a_n = n^k e^{-n}$; jak dokázat, že její limita je 0? Nic nám nebrání místo posloupnosti uvažovat příslušnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}$$

a pomocí limitního D'Alembertova podílového kritéria (řada má nezáporné členy!) dokázat, že tato řada je konvergentní:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k e^{-(n+1)}}{n^k e^{-n}} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{e} < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy opravdu konverguje; podle Věty 5.1 to ale znamená, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a jsme hotovi.

Další neurčité výrazy a L'H: Problematické limity ostatních „neurčitých výrazů" (tj. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0) lze jednoduchými triky převést na výrazy, na které už l'Hospitalovo pravidlo aplikovat lze; zda to povede k výsledku je ovšem otázka jiná.

Kupříkladu máme-li zadáno spočítat limitu ve tvaru

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)},$$

kde $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ a $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ (jde tedy o typ 1^∞), použijeme nejprve definici obecné mocniny

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

a pak počítáme limitu exponentu, tedy limitu funkce $g(x)\ln(f(x))$; ta je už typu $\infty \cdot 0$, protože $f(x) \to 1$, funkce ln je v bodě 1 spojitá a jest $\ln 1 = 0$ (používáme tedy Větu o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí), a dále ji upravíme takto:

$$g(x)\ln(f(x)) = \frac{\ln(f(x))}{1/g(x)};$$

poslední výraz je typu $\frac{0}{0}$, a můžeme se tedy pokusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo pro tento případ:

$$\lim_{x\to c} \frac{\ln(f(x))}{1/g(x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to c} \frac{f'(x)/f(x)}{-g'(x)/g^2(x)} = \text{atd.} \qquad \triangle$$

Důkaz Věty 6.2. Předpokládejme nejprve, že $a \in \mathbb{R}$ (případ $a \in \{-\infty, \infty\}$ vyřešíme v druhé části důkazu). Nechť existuje $A = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (tj. pravá strana dokazované rovnosti má smysl); náš cíl bude ukázat, že $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (důkaz pro limitu zleva je možno provést analogicky). Budiž dáno $\varepsilon > 0$; podle předpokladu (a definice limity) existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $x \in (a, a+\delta)$ platí

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Bez újmy na obecnosti nyní předpokládejme, že $f(a) = g(a) = 0$; můžeme tak učinit, neboť předpoklady věty ani její tvrzení o hodnotě obou funkcí v bodě a neříkají nic (připomeňme, že limita nezávisí na hodnotě v bodě). Všimněme si, že pak $f(a) = 0 = \lim_{x\to a+} f(x)$ a $g(a) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)$, takže obě funkce jsou v bodě a zprava spojité. Nyní nechť je dán libovolný bod $x \in (a, a+\delta)$; ověříme předpoklady Věty 6.1 na intervalu $[a, x]$. Funkce f, g jsou na tomto intervalu spojité, protože kromě bodu a (v němž jsme spojitost zprava právě zajistili) jsou spojité i ve všech bodech $y \in (a, x]$: Skutečně, zlomek $\frac{f'(y)}{g'(y)}$ má totiž smysl, a tedy jest $f'(y), g'(y) \in \mathbb{R}$, tj. obě derivace jsou vlastní. Odtud podle Věty 4.4 plyne spojitost; zároveň dostáváme i $g'(y) \neq 0$.

Jsou tedy splněny předpoklady Věty 6.1, která garantuje existenci bodu $\xi \in (a, x)$, v němž platí rovnost

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Protože $\xi \in (a, x) \subseteq (a, a+\delta)$, platí (6.3), a podle rovnice výše tedy máme i

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

Tuto nerovnost jsme dostali pro všechna $x \in (a, a+\delta)$, a jsme tedy hotovi za předpokladu $a \in \mathbb{R}$.

Nyní předpokládejme, že $a = \infty$ (pro $a = -\infty$ funguje analogický důkaz). Podle předpokladů věty máme

$$A = \lim_{y\to\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}, \quad \lim_{y\to\infty} f(y) = \lim_{y\to\infty} g(y) = 0.$$

Píšeme zde proměnnou y místo x, protože tyto funkce budeme chápat jako vnější funkce: Podle Věty o limitě složené funkce s vnitřní funkcí $g(x) = 1/x$ jsou výše uvedené rovnice ekvivalentní následujícím.

$$A = \lim_{x\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Podle už dokázané části věty (tj. pro případ $a \in \mathbb{R}$) můžeme počítat takto

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = A,$$

kde první rovnost plyne opět z Věty o limitě složené funkce. □

6.2 Bolzanova-Cauchyova podmínka

Mějme nějakou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel. Jakou představu máme spojenou s tím, že posloupnost je konvergentní, tj. že má konečnou (vlastní) limitu? Například víme, že limita je jednoznačně určena (Věta 2.3) a že každá posloupnost s konečnou limitou je omezená (Věta 2.4). Intuitivně si představujeme, že posloupnost se blíží k dané hodnotě. Můžeme si ale také všimnout, že konvergentní posloupnost se v jistém smyslu „smršťuje“: podíváme-li se na její členy s dostatečně velkými indexy, nebudou se od sebe příliš lišit.

Definice limity posloupnosti explicitně hovoří o hodnotě této limity a říká, že jednotlivé členy posloupnosti jsou této hodnotě „stále blíž“. Co kdybychom však neznali hodnotu limity a věděli jen to, že se naše posloupnost v jistém smyslu „smršťuje“? Jsme schopni říct, že pak už nutně existuje konečná limita? Odpověď na tuto otázku dává následující definice (která dává přesný smysl onomu „smršťování“) a věta hned pod ní.

Definice (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro posloupnost)**.** Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (BC), jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant n_0\colon |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Věta 6.3. *Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a dokažme platnost (BC); budiž tedy dáno $\varepsilon > 0$ a označme $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Podle definice limity posloupnosti pro toto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geqslant n_0$ jest

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.4}$$

Pak pro libovolná čísla $m, n \geqslant n_0$ dostáváme

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy (BC) platí.

Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje (BC). Náš cíl je najít její vlastní limitu; nejprve však dokážeme pouze to, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Podle (BC) pro $\varepsilon = 1$ existuje počáteční index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro libovolné indexy $m, n \geqslant n_0$ jest $|a_m - a_n| < \varepsilon = 1$. Speciálně tak (pro $m = n_0$) máme $|a_{n_0} - a_n| < 1$, tedy pro všechna $n \geqslant n_0$ dostáváme

$$a_{n_0} - 1 \leqslant a_n \leqslant a_{n_0} + 1,$$

tj. posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (tedy od indexu n_0) je omezená. Tím pádem je omezená i celá posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (2.17) existuje konvergentní vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, jejíž limitu označíme

$$A = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}. \tag{6.5}$$

Chceme dokázat, že dokonce $A = \lim_{n\to\infty} a_n$. Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Díky platnosti (BC) pro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ najdeme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geqslant n_1$ platí

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z rovnice (6.5) dále plyne, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \geqslant k_0$ jest

$$|a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože posloupnost indexů (tj. přirozených čísel) $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, která určuje naši konvergentní podposloupnost je (z definice) rostoucí, je jasné, že můžeme najít přirozené číslo $K \geqslant k_0$ takové, že navíc $n_K \geqslant n_1$. Pak pro všechna $n \geqslant n_1$ dostaneme

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_K} + a_{n_K} - A| \leqslant |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

6.3 Zavedení elementárních funkcí

Věta 6.4. *Existuje jediná funkce* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$;

(ii) $\exp'(0) = 1$;

(iii) exp *je rostoucí na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Existuje více způsobů, jak zavést tuto funkci; nejelegantnější z nich je patrně pomocí mocninné řady, což je ovšem látka pozdějších semestrů kurzu analýzy. Elementární způsob jak definovat exponenciálu spočívá v tom, že definujeme obecnou mocninnou funkci, a to postupně. Pro reálné číslo (základ mocniny) $a > 1$ a racionální exponent $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, kde $r \in \mathbb{Z}$ a $s \in \mathbb{N}$, je přirozené definovat

$$a^q = a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}.$$

Je snadné ověřit, že takto definovaná mocnina (zatím pouze pro racionální exponenty) splňuje obvyklé vzorce a vlastnosti: $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$, funkce $q \mapsto a^q$ je rostoucí pro $a > 1$ (klesající pro $a \in (0, 1)$ a konstantně 1 pro $a = 1$). O něco těžší, ale stále zvládnutelné, je potom ověřit, že pro posloupnost racionálních čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $q_n \to 0$ jest $a^{q_n} \to 1$, což se hodí k důkazu korektnosti následující definice.

Abychom definovali obecnou mocninu (s obecným reálným exponentem) a^α, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, uvědomíme si, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost racionálních čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k α, tj. $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$. Pak stačí definovat

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

a dokázat, že tato definice nezávisí na naší volbě posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ jdoucí k α. Nakonec definujeme (jak jsme zvyklí)

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{a} \quad \exp x = e^x. \qquad \square$$

Protože taková funkce je jediná (což je součástí tvrzení věty), z vlastností exponenciály uvedených ve větě lze odvodit všechny ostatní její vlastnosti. Mezi ně patří i fakt, že $\exp 1 = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, a tedy můžeme psát $\exp x = e^x$.

Věta 6.5. *Existuje jediná dvojice funkcí* $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

(i) Funkce sin *je lichá,* cos *je sudá;*

(ii) platí součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

(iii) $\sin'(0) = 1$.

Funkce tangens a kotangens definujeme známým způsobem jako $\mathrm{tg} = \sin / \cos$ a $\mathrm{cotg} = \cos / \sin$. Funkce logaritmus je definována prostě jako $\ln = \exp^{-1}$, tj. inverzní funkce k exponenciále a cyklometrické funkce jsou definovány vzorci $\arcsin = \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$, $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$, $\mathrm{arctg} = \left(\mathrm{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}\right)^{-1}$ a $\mathrm{arccotg} = \left(\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$, tedy jako inverzní funkce k restrikcím goniometrických funkcí na jisté maximální intervaly, na nichž jsou tyto funkce prosté (tyto intervaly by šlo zvolit i jinak a naše konkrétní volba těchto intervalů byla stanovena prostě dohodou).