Matematika:
Průvodce nesnázemi začátečníka

Martin Rmoutil

30. září 2022

Obsah

Předmluva

Tento text představuje začátek mého projektu, jehož cílem je vytvořit zcela netradiční kombinaci sbírky úloh, pracovního sešitu a učebního textu na témata, kterým se při výuce matematiky na MFF často z časových důvodů nedostává patřičné pozornosti. Často se předpokládá, že si student znalosti doplní sám z nějakého textu, popřípadě si je domyslí, prokonzultuje se svými kolegy. Tento způsob fungoval celé generace a není důvod se domnívat, že by v tom neměl pokračovat; přesto se mi ale na základě poznatků ze zkoušek z předmětů, které vyučuji, nebo ze státních zkoušek zdá, že velká část látky, kterou učíme, prostě v mnoha případech nepadá na úrodnou půdu.

Část problému vidím v tom, že studenti jsou zahlceni velkým množstvím látky, kterou tak tak stíhají vstřebávat, jde-li vše hladce; jakmile však přijdou nesnáze, už nemají energii (nebo čas) tyto nesnáze dostatečně svědomitě překonávat. Spokojí se tak jen s hrubým porozuměním, třeba si i vědomi toho, že věc nechápou pořádně. Takovéto nedostatky se obvykle dají skrýt u jednotlivých zkoušek: velmi obtížných věcí v jediném předmětu nebývá mnoho, a tak není nemožné se problémová místa naučit zpaměti, nebo se jim dokonce vyhnout docela opakovanými pokusy o složení zkoušky. I zkouška složená „napotřetí za tři“ se počítá. Předměty však na sebe navazují a kumulující se neznalosti můžou po pár semestrech způsobit, že je probíraná látka studentovi do té míry vzdálená, že všechny zbylé snahy o porozumění prostě vzdá a snaží se jen „proplout“.

V tomto vznikajícím textu se chci postupně zaměřovat na aspekty, které jsou podle mé zkušenosti obtížné, a pomocí návodných a názorných úloh čtenáři pomoci, aby si vše potřebné co nejsnáze zvládl sám uvědomit.

Kapitola 1

Matematické vyjadřování

Vysokoškolská matematika klade velké nároky na přesnost vyjadřování, což má několik důvodů. Některé myšlenky, se kterými se setkáte, jsou složitější, než na co jste doposud byli zvyklí. Při prvním setkání je často obtížné je (intuitivně) pochopit. Je tak o to důležitější vyjádřit tyto věci přesně, pokud možno tak, aby bylo vyloučeno nedorozumění. Představte si, že se kupříkladu snažíte pochopit komplikovanou matematickou větu, aniž byste si byli (aspoň formálně) jisti tím, co tato věta říká. Je zřejmé, že pokud máte několik možných interpretací její formulace a nevíte, která interpretace je ta správná, je pochopení věci těžší.

Dalším důvodem, proč se z matematiky stala v mnoha ohledech dosti formální disciplína plná speciálních značek, je skutečnost, že i v případech, kdy máme do nějaké problematiky „intuitivní vhled“, nás matematická skutečnost často zaskočí. Leckterá platná matematická věta naší prvotní intuici odporuje: jsou to případy, kdy narazíme na něco nového, nějaký jev nebo princip, který jsme dosud nechápali; po jeho pochopení se naše intuice může změnit a dříve nepředstavitelné se stane „jasným“. Abychom však mohli tímto blahodárným procesem projít, musíme mít nezávislou a bezvýhradně spolehlivou možnost, jak ověřit platnost oné překvapivé skutečnosti *bez bezprostředního použití intuice* (v opačném případě bychom jen těžko odolávali pokušení považovat tvrzení naší intuici odporující jednoduše za nepravdivá). Je tedy potřeba postavit matematické uvažování na pevné základy a k tomu je beze sporu potřeba přesné vyjadřování. Intuice je nenahraditelná při vymýšlení nových nebo vhodných řešení problémů, nemůžeme však dokázat platnost matematické věty pouze na základě intuice. Je potřeba se opřít o přesnou argumentaci, kterou lze rozložit na logicky nezpochybnitelné kroky.

V běžném jazyce, ba i v matematice vyučované na gymnáziu, se však obvykle setkáme s vyjadřováním nepřesným, závislým na kontextu nebo jiných kanálech, přes které probíhá naše komunikace. Skoro všechna slova, která běžně používáme, mají *více možných významů*, mezi nimiž si vybíráme na základě složitých podvědomých procesů; naproti tomu při vyjadřování v matematice je nutné mít pro použité pojmy *jednoznačné* definice. V běžném jazyce může mít jedna věta (tj. určitá posloupnost slov) zcela odlišné, dokonce protichůdné významy v závislosti na faktorech jako hlasitost a tón hlasu atd; v matematice si toto nemůžeme dovolit: každá posloupnost slov (a symbolů) musí mít nejvýše jeden význam. Abychom co nejdříve dosáhli potřebné přesnosti a bez potíží se spolu domluvili, budeme (v 1. semestru o něco více než v semestrech následujících) zavádět různé konvence a definice.

První část tohoto textu vám má usnadnit přechod na precizní způsob vyjadřování, který používáme v matematice. Je dobré tento aspekt vašeho studia matematiky nepodcenit, a pokusit se ho zvládnout co nejdřív a co nejlépe; koneckonců ho budete používat po celé studium a pravděpodobně i ve své následující praxi. Dlouholetá zkušenost většiny vysokoškolských učitelů matematiky ukazuje, že právě tyto aspekty, tj. přesné vyjádření myšlenky, resp. správné pochopení přesně vyjádřené myšlenky, představují pro většinu studentů značný (a podle mého názoru často dokonce hlavní) problém. Následující odstavce vám mají pomoci tento problém překonat, někdy s pomocí příkladů „ze života", které (doufejme) umožní věc pochopit poněkud snáze. Probírejte je postupně a zadané „úlohy" řešte pokud možno bez nahlížení do výsledků.

1.1 Výroky

$\boxed{1}$ Matematické (i jiné) pravdy i nepravdy vyjadřujeme pomocí tak zvaných *výroků*. Tento pojem se obecně nedá úplně přesně definovat a není to ani potřeba, spokojíme se s hrubým ale vcelku názorným přiblížením: za *výrok* považujeme libovolné „vyjádření" které je z principu buďto pravdivé, nebo nepravdivé. Nemusíme přitom být schopni o pravdivosti *rozhodnout*, stačí, aby otázka pravdivosti byla smysluplná, tj. že jedna z možností (pravdivost vs. nepravdivost) jistě nastává. Rozhodněte, která z následujících vyjádření jsou výroky. Které z těchto výroků jsou pravdivé?

(a) Dnes je krásné počasí.

(b) Prší a fouká vítr.

(c) Kéž by zapršelo.

(d) Ode dneška za rok bude krásný den.

(e) Karel IV. měl dne 1.1.1348 rýmu.

(f) Už aby bylo po volbách!

(g) Všichni velcí obratlovci žijící v moři jsou ryby.

(h) Je 0 sudé číslo, nebo je 0 liché číslo?

(i) Všimněme si, že $2 + 2 = 4$.

(j) Jestliže prší, mám u sebe deštník.

(k) $1 + 1 \leqslant 2$.

(l) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

(m) Protože $2+2 = 4$, New York je velké město.

(n) $\frac{1}{0} = \infty$.

(o) V naší galaxii neexistuje žádná jiná technologická civilizace.

$\boxed{2}$ Často je vhodné výroky, které v matematice studujeme, označovat písmeny – například kvůli přehlednosti zápisu. Můžeme tak třeba výrok „$2 + 2 = 4$." označit písmenem C nebo třeba výrok „0 je liché číslo." označit písmenem D. Je dokonce běžné pracovat s „abstraktními výroky", jejichž obsah neznáme, známe pouze jejich označení písmenem a víme, že jejich pravdivostní hodnota je buďto 0 (pokud neplatí) nebo 1 (pokud výrok platí).

Mějme tedy nějaké dva výroky označené písmeny A, B. Kupříkladu může jít o kterékoliv výroky z předchozího paragrafu nebo o jakékoliv jiné výroky. Obsah výroků A, B

tedy neznáme, pouze o každém z nich víme, že má *nějakou* pravdivostní hodnotu (tj. 0, nebo 1). Pomocí logických spojek $\wedge$ („a“, „a zároveň“),[1] $\vee$ („nebo“), $\Rightarrow$ (implikace), $\Leftrightarrow$ (ekvivalence) a také $\neg$ (negace) můžeme z výroků A, B utvářet výroky složitější: $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $\neg B$ apod. Je dobré si uvědomit, že pravdivostní hodnota takto vzniklého složeného výroku záleží jen na zvolené logické spojce a na pravdivostních hodnotách A, B; není potřeba žádná další informace, například obsahová souvislost mezi A a B. Tak například $A \wedge B$ je pravdivý výrok právě tehdy, když jsou pravdivé oba výroky A i B. Výrok $\neg B$ platí právě tehdy, když B neplatí. A tak dále; v případě pochybností si vždy můžeme pomoci tzv. tabulkami pravdivostních hodnot, které nejspíš znáte už ze střední školy.

Rozhodněte, které z následujících zápisů představují pravdivé výroky (využíváme výroky (a)-(o) z předchozího odstavce):

(i) (a)$\wedge$(b);

(ii) (a)$\wedge$(c);

(iii) (k)$\vee$(b);

(iv) $\neg$(g);

(v) (e)$\Rightarrow$(o);

(vi) (a)$\Leftrightarrow$(o);

(vii) (g)$\Rightarrow$(o);

(viii) (g)$\Rightarrow$(a);

(ix) ((a)$\wedge$(e))$\vee$($\neg$(a)$\wedge$(e)).

Pro správné pochopení posledního z uvedených výroků je potřeba vědět dodatečnou informaci, že negace má přednost před ostatními logickými spojkami. Výraz $\neg$(a)$\wedge$(e) tedy vyhodnotíme tak, že nejprve aplikujeme negaci a až pak spojku „$\wedge$“. Podrobněji se na to podíváme v dalším paragrafu.

3 Podíváme se nyní na výrok (ix) z předchozího paragrafu a dokážeme, že platí právě tehdy, když platí výrok (e). To vlastně znamená, že (ix) říká přesně totéž co (e); nesou-li oba výroky tutéž informaci, je zřejmé, že (ix) je zbytečně složitý, místo něj stačí uvažovat prostě (e). Jak ale tuto shodu dokázat?

Jednou z metod k lepšímu pochopení (struktury) složených výroků jsou tzv. tabulky pravdivostních hodnot. Jak víte, význam každé logické spojky se takovou tabulkou dá popsat. Výrok (ix), jak ho máme napsaný výše, zahrnuje binární logické spojky $\wedge$ a $\vee$ a také (tzv. unární) logickou spojku $\neg$. Abychom tedy mohli napsat tabulku pravdivostních hodnot pro (ix) potřebujeme znát tabulky příslušné každé z těchto spojek. Předpokládám, že to pro vás problém nepředstavuje, a tak se podíváme rovnou na „velkou“ tabulku, jejíž sloupce odráží postupný vznik složené formule (ix): nejprve utvoříme (a současně vyhodnotíme z hlediska pravdivosti) její části a nakonec formuli (ix) samotnou. V tabulce níže jsem vyplnil pouze první sloupec za dvojitou čarou, zbytek si postupně – sloupec po sloupci – vyplňte sami. Na závěr porovnejte sloupec odpovídající (e) a (ix); měli byste zjistit, že jsou stejné.

(a)	(e)	(a) $\wedge$ (e)	$\neg$(a)	$\neg$(a) $\wedge$ (e)	(ix)
0	0	0	.	.	.
0	1	0	.	.	.
1	0	0	.	.	.
1	1	1	.	.	.

[1]Spojky „$\wedge$“ a „$\vee$“ se mohou plést, je ovšem mimořádně důležité, aby se tak nedělo. Aby se vám to nestávalo, stačí si všimnout, že symbol pro spojku „A“, tedy „$\wedge$“, vypadá jako „písmeno A bez přepážky“.

$\boxed{4}$ V předchozím paragrafu jsme si pomocí tabulky rozmysleli, že výroky (ix) a (e) mají stejnou pravdivostní hodnotu. Intuitivně vzato se tedy nabízí tuto skutečnost vyjádřit pomocí (logické spojky) ekvivalence, tj. výrokem (ix)$\Leftrightarrow$(e), který by měl „platit obecně“, tj. ve všech (čtyřech) možných situacích. Co to přesně znamená a je tomu opravdu tak? Ano:

Abychom si to rozmysleli, nejprve rozepíšeme (ix) podle definice; tutéž ekvivalenci pak píšeme takto:

$$\Big(\big((\mathrm{a}) \wedge (\mathrm{e})\big) \vee \big(\neg(\mathrm{a}) \wedge (\mathrm{e})\big)\Big) \Leftrightarrow (\mathrm{e}).$$

Zopakujme, že při všech čtyřech možných kombinacích pravdivostních hodnot výroků (a) a (e), tj. ve všech možných případech, mají obě strany této ekvivalence stejnou pravdivostní hodnotu. Jinak řečeno, buďto jsou obě pravdivé, nebo obě nepravdivé. V obou těchto případech však ekvivalence platí, jak se můžete přesvědčit pohledem do její tabulky. To znamená, že uvedená ekvivalence platí ve všech čtyřech případech; jinak řečeno, jí příslušný sloupec by obsahoval čtyři jedničky a žádnou nulu.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Obecně podobné složené výroky nazýváme *tautologie*. Neformálně řečeno tautologií v tomto kontextu rozumíme výrok, který je pravdivý ve všech možných případech. Opakem tautologie je *kontradikce*, tj. výrok, který není pravdivý v žádném možném případě (takový výrok by v příslušném sloupci tabulky pravdivostních hodnot měl samé nuly). Příkladem kontradikce je třeba výrok $\neg$((ix)$\Leftrightarrow$(e)); to je jasné z už ověřené skutečnosti, že (ix)$\Leftrightarrow$(e) je tautologie – ta je vždy pravdivá, a její negace je tedy vždy nepravdivá.

$\boxed{5}$ Metodou postupného vyplňování tabulky dokažte, že následující formule je tautologie. Rozmyslete si, co formule říká a že je to vlastně „jasné“.

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\Big) \Rightarrow \big(A \Rightarrow C\big) \tag{1.1}$$

Uvědomte si, že v této formuli se vyskytují dokonce tři výrokové proměnné (A, B, C), a tedy tabulka bude mít více řádků než 4 (jako to bylo pro dvě proměnné). Dále je potřeba si rozmyslet, jak budou vypadat jednotlivé sloupce. Je jasné, že první tři sloupce budou odpovídat jednotlivým proměnným A, B, C. Dále se musíme podívat na strukturu formule (1.1) (závorky, pořadí operací) a představit si, jak tato formule vzniká z formulí jednodušších. Jak formuli postupně skládáme, poznamenáváme si jednotlivé mezikroky do záhlaví sloupců. V záhlaví posledního sloupce bude formule sama.

Zkuste tabulku sestavit sami a vyplnit ji. Pokud to nezvládnete (nebo se vám nechce), v řešeních najdete návod na sestavení tabulky a jejímu vyplnění se budeme věnovat v dalším paragrafu.

$\boxed{6}$ V předchozím paragrafu jste měli sestavit tabulku, která měla vypadat zhruba takto. Nyní jde o to do ní doplnit všechny pravdivostní hodnoty a přesvědčit se, že v posledním sloupci, který odpovídá vyšetřované formuli (1.1), neboli tato formule je pravdivá ve všech možných případech, tj. jedná se o *tautologii*.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	(1.1)
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

$\boxed{7}$ Specifické problémy se týkají logické spojky $\Rightarrow$, tedy implikace: velmi často je špatně chápána, přičemž existuje hned několik způsobů, jak se mýlit. Abychom si uvědomili, v čem tkví ony potíže, je dobré se znovu podívat na tabulku pravdivostních hodnot implikace:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rozmyslete si podle tabulek pravdivostních hodnot, že výrok $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní výroku $\neg A \vee B$. Pokud to chcete udělat metodou postupného vyplňování tabulky, tak si nakreslete tabulku se sloupci nadepsanými pořadě A, B, $\neg A$, $\neg A \vee B$ a nakonec můžete připsat sloupec $A \Rightarrow B$ z tabulky výše. Uvidíte, že poslední dva sloupce jsou stejné.

$\boxed{8}$ Vzhledem k tomu, že implikace je plně popsána výše uvedenou jednoduchou tabulkou, je dále zcela zřejmé, že (v rozporu s běžnou představou) není potřeba žádná obsahová souvislost mezi výroky A a B, které implikací spojujeme. To mimo jiné znamená, že třeba implikace „Protože $2+2=4$, New York je velké město.“ je pravdivá, jak se můžeme přesvědčit pohledem do posledního řádku tabulky: jak předpoklad A (tj. „$2+2=4$“) tak její závěr B (tj. „New York je velké město.“) jsou pravdivé výroky, tj. mají pravdivostní hodnotu 1, a totéž tedy platí pro $A \Rightarrow B$. Zkuste si vymyslet jiné „absurdní příklady“ pravdivých implikací, ideálně založené na jiném než posledním řádku tabulky (příklady podobné už uvedenému najdete v řešení, ale zkuste to nejprve sami).

$\boxed{9}$ Často je problémem záměna implikace a ekvivalence. Když například tatínek svému nezbednému synkovi řekne „Když nesníš oběd, nedostaneš zmrzlinu.“, ještě to (striktně vzato) neznamená, že po vzorné konzumaci oběda zmrzlina bude. Podobně, když prohlasím, že „Jestliže prší, mám s sebou deštník.“, ještě to neznamená, že pokaždé když mám s sebou deštník, musí nutně pršet: někdy si ho vezmu „zbytečně“. Pokuste se vymyslet nějaké příklady ze života, nějaká vyjádření formulovaná pomocí implikací, která běžně chápeme jako ekvivalence.

1.2 Kvantifikátory

10 Dosud probrané poznatky o výrocích spadají do oblasti zvané *výroková logika*. Při většině matematické práce si ale se samotnou výrokovou logikou nevystačíme; je potřeba mít možnost vyjádřit, že něco platí pro *všechny* objekty určitého typu nebo že *existují* objekty s určitou vlastností. Samotné logické spojky tyto věci nejsou schopny vyjádřit, zejména ne v případech, kdy pracujeme s nekonečnými množinami objektů (což činíme nestále, například množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je samozřejmě nekonečná).

Z toho důvodu existují obecný kvantifikátor $\forall$ („pro všechna“) a existenční kvantifikátor $\exists$ („existuje“). S jejich pomocí jsme schopni vyjádřit velmi širokou škálu tvrzení, je ovšem namístě opatrnost: je velmi snadné (a časté) dělat při jejich použití nejrůznější chyby.

11 Ke smysluplnému použití kvantifikátorů je potřeba pracovat s *proměnnými*. Je samozřejmě nesmysl „kvantifikovat“ (opatřovat kvantifikátory) jednoznačně určené výroky jako „Dnes je krásné počasí.“ Dostávali bychom pak stěží smysluplné paskvily jako například

$$\forall x\colon\ \text{dnes je krásné počasí.}$$

Z takových příkladů je zřejmé, že kvantifikace (ať už obecná nebo existenční) se musí vztahovat k nějaké proměnné, která vystupuje v části „za dvojtečkou“. Třeba

$$\forall \text{ den } x\colon\ \text{v den } x \text{ je hezké počasí.}$$

je poněkud krkolomně vyjádřený, nicméně jasný výrok, který vyjadřuje, že každý den je hezké počasí. Pokud v tomto výroku nahradíme obecný kvantifikátor existenčním, dostaneme výrok, který říká, že některý den je hezké počasí.

12 Pokuste se v duchu předchozího odstavce vyjádřit pomocí kvantifikátoru výrok, že „Všichni velcí obratlovci žijící v moři jsou ryby.“ Je zřejmé, že je potřeba použít obecný kvantifikátor. Jaké tvrzení vznikne, když místo obecného kvantifikátoru použijete existenční? Bude tato změna mít vliv na pravdivostní hodnotu výroku? Až si rozmyslíte odpovědi, podívejte se do řešení, kde jsou k této věci důležité poznámky.

13 Negace výroků s jedním kvantifikátorem obvykle nejsou problém, přesto se rychle podívejme na několik případů. Uvažujme třeba výrok „Všichni matfyzáci jsou chytří.“ Jeho negace se dá zapsat jako

$$\neg\big(\text{Všichni matfyzáci jsou chytří.}\big),$$

to ale není příliš užitečné pozorování. Poněkud rozumnější vyjádření negace je říci něco jako „Ne všichni matfyzáci jsou chytří.“, odkud už je jen krůček k formulaci „Někteří matfyzáci nejsou chytří.“. Tato poslední formulace už zřetelně zahrnuje existenční kvantifikaci.

Pro následující dvě sady výroků předpokládejte, že matfyzák je chytrý, právě když není hloupý (tj. také: matfyzák je hloupý, právě když není chytrý; to je totéž řečeno obměnou). Spárujte dvojice z levého a pravého sloupce, které mají stejný význam. Pak spárujte dvojice, které mají opačný význam (tj. jsou si navzájem negacemi).

(a)	Všichni matfyzáci jsou chytří.	(1)	Žádný matfyzák není chytrý.
(b)	Všichni matfyzáci jsou hloupí.	(2)	Žádný matfyzák není hloupý.
(c)	Někteří matfyzáci jsou chytří.	(3)	Někteří matfyzáci nejsou chytří.
(d)	Někteří matfyzáci jsou hloupí.	(4)	Někteří matfyzáci nejsou hloupí.

14 Vraťme se ještě jednou k výroku studovanému v jednom předchozím odstavci:

$$\forall \text{ velký obratlovec žijící v moři } x\colon\ \ x \text{ je ryba.} \tag{1.2}$$

Jaká je negace tohoto výroku? Tak samozřejmě jde o výrok

$$\neg\big(\forall \text{ velký obratlovec žijící v moři } x\colon\ \ x \text{ je ryba}\big), \tag{1.3}$$

to ale není příliš užitečné pozorování. Rádi bychom výrok (1.2) přeformulovali tak, aby byl jeho obsah více zřejmý. V souladu s úvahami předchozího odstavce tak učiníme následovně:

$$\exists \text{ velký obratlovec žijící v moři } x\colon\ \neg(x \text{ je ryba}),$$

tj. „Existuje velký mořský obratlovec, který není ryba."

Označme nyní písmenem V množinu všech velkých mořských obratlovců a písmenem R a množinu všech ryb. Jak lze naše dosavadní zjištění zapsat pomocí tohoto značení kratčeji? Uvažte, že kupříkladu zápis „$x \in V$" znamená, že x je velký mořský obratlovec, apod.

15 Ještě jednou se zaměříme na výrok (1.2); tentokrát ovšem použijeme jiné označení. Místo „$x \in R$" („x je ryba") budeme psát „$\mathcal{R}(x)$" a místo „$x \in V$" („x je velký mořský obratlovec") budeme psát „$\mathcal{V}(x)$". Máme-li tedy nějaké x, pak zápis „$\mathcal{R}(x)$" znamená, že „x je ryba", a podobně pro „$\mathcal{V}(x)$". Zápisy jako „$\mathcal{R}(x)$" a „$\mathcal{V}(x)$" se obecně nazývají *predikáty* nebo *výrokové funkce*;[2] vyznačují se tím, že po dosazení nějaké konstanty (tj. konkrétního objektu) za proměnnou x se z nich stávají výroky. Tak například „$\mathcal{R}$(pstruh)" nebo „$\mathcal{R}$(delfín)" jsou výroky (první z nich je pravdivý, druhý nepravdivý).

Jak upravit zápis používající množinového značení R, V

$$\forall x \in V : x \in R$$

s využitím těchto nových symbolů? Za dvojtečkou není problém; psát $\forall \mathcal{V}(x)$ ale nedává smysl, neboť nemůžeme kvantifikovat výroky $\mathcal{V}(x)$. Pokuste se najít jinou cestu jak tento výrok ekvivalentně přeformulovat s použitím predikátů $\mathcal{R}$ a $\mathcal{V}$.

1.3 Úlohy o lásce a manželství

V tomto oddílu budeme používat značení shrnuté v následující tabulce:

[2] někdy též *výrokové formy*

M	...	množina všech mužů;
Z	...	množina všech žen;
$S(m, z)$	...	muž m a žena z jsou sezdáni;
$L_1(m, z)$	...	muž m miluje ženu z;
$L_2(m, z)$	...	žena z miluje muže m.

Jsou tedy popsány tři binární predikáty[3] a dvě množiny prvků s nimiž pracujeme. K tomu máme k dispozici logické spojky a kvantifikátory. Pomocí těchto symbolů můžeme vyjádřit překvapivě širokou škálu výroků o vztazích mezi muži a ženami.

Všimněme si, že „$m \in M$“ prostě znamená, že m je nějaký muž a že můžeme používat také symbol „=“, k tomu, abychom naznačili, že dvě označení reprezentují tutéž osobu: například „$m_1 = m_2$“ znamená, že m_1 je tentýž muž jako m_2.

Je dobré si všimnout, že všechny tři zavedené predikáty mají pevně určené pořadí proměnných: první proměnná odpovídá vždy muži, druhá proměnná ženě. *Je tedy chyba* například pro nějaké $m \in M$ a $z \in Z$ psát $L_1(z, m)$.

16 Pomocí logických symbolů a značení z tabulky přepište českou větu:

Každou ženu miluje nějaký muž.

Je snad zřejmé, že výrok zahrnuje dvě proměnné, jednu pro ženy, jednu pro muže a dva kvantifikátory související se slovy „každou“ a „nějaký“. Je důležité dbát na správné pořadí kvantifikátorů. Pokuste se uvedenou větu zapsat pomocí zavedeného značení a uveďte, jestli/jak se změní význam výroku po „přehození kvantifikátorů“.

17 Zapište pomocí zavedeného značení následující výroky:

(a) Existuje vdaná žena.

(b) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

(c) Každá žena má nejvýše jednoho manžela.

(d) Každý muž má nejvýše jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co (c)?)

(e) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co (a)?)

∗(f) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)

∗(g) Každou vdanou ženu miluje nějaký muž. (Říká tento výrok totéž, co (b)?)

∗(h) Každého šťastně ženatého muže miluje ještě jiná žena. (Řekneme, že muž je šťastně ženatý, pokud miluje (nějakou) svou manželku.)

[3] Tj. predikáty se dvěma volnými proměnnými; dosud jsme se zde setkali s predikáty unárními, např. „x je ryba“ resp. „$\mathcal{R}(x)$“.

$\boxed{18}$ Následující výroky přeložte do češtiny:

(i) $\exists m \in M\ \forall z \in Z \colon \neg S(m,z)$;

(j) $\exists z \in Z\ \forall m \in M \colon L_1(m,z) \Rightarrow \neg L_2(m,z)$;

(k) $\exists z \in Z\ \forall m \in M \colon L_2(m,z) \Rightarrow \neg L_1(m,z)$;

$*$(l) $\forall z \in Z \colon \big(\exists m \in M \colon L_2(m,z)\big) \Longrightarrow \big(\exists m \in M \colon L_1(m,z) \wedge \neg L_2(m,z)\big)$;

$\boxed{19}$ Máme k dispozici formální jazyk, který umí popisovat některé vztahy mezi muži a ženami. Některé výroky jsme překládali z formálního jazyka do češtiny nebo naopak; je ovšem jasné, že tyto „překlady“ probíhají pouze v intuitivní rovině. Tak třeba výrok (i) z předchozího odstavce jsme přeložili jako „Existuje svobodný muž.“, aniž bychom předem definovali, co myslíme spojením „svobodný muž“ – místo takovéhoto vysvětlení jsme se odkázali na představu o obsahu tohoto pojmu, kterou s velkou pravděpodobností sdílíme. Takovýto postup je přijatelný při běžné komunikaci, musíme však být smířeni s tím, že občas dochází k nedorozuměním apod. V matematice si toto nemůžeme dovolit, a proto musíme každý nový pojem jednoznačně definovat.[4]

Definice v matematice není nic jiného než zkratka. Tak například místo toho, abychom psali, že pro jistého muže $m \in M$ platí $\forall z \in Z \colon \neg S(m,z)$, můžeme říkat, že m je *svobodný*.

Výrok „m je svobodný“ je tedy zkratka za: „$\forall z \in Z \colon \neg S(m,z)$“.

Zkuste si nyní napsat formální definici svobodného muže. To znamená napsat stručný odstavec nebo českou větu, *kterou když si přečte někdo do problému zcela nezasvěcený, pochopí z ní, co v našem formálním jazyce rozumíme pojmem* „svobodný muž“.

$\boxed{20}$ Napište rozumné (s nadsázkou) *ucelené* formální definice následujících pojmů. Zkuste si v některých případech ulehčit práci použitím předchozích definic (někdy je to vhodné, ale nikdy to není nutné).

(1) Svobodná žena;

(2) ženatý muž;

(3) šťastně vdaná žena (s manželem se vzájemně milují);

(4) nevěrný manžel (viz výše nevěrná manželka);

(5) věrný manžel;

(6) polygamista (má více manželek);

(7) neodolatelná žena (všichni jí opětují lásku);

(8) svůdnice (neodolatelná žena, která miluje některé muže, a to výhradně ženaté).

[4] Toto pravidlo není zcela bez výjimek, ty jsou však zcela mimo rámec tohoto textu.

Řešení

(1) Výroky jsou: (a), (b), (d), (e), (g), (j), (k), (m), (n), (o). Některé výroky jsou někdy pravdivé a jindy ne. U některých pravdivostní hodnotu nemůžeme ihned určit; např. pravdivost dnes proneseného (d) se asi dozvíme za rok. Platnost (e) nejspíš nejsme schopni ověřit ani vyvrátit. Výrok (m) je strikně logicky vzato pravdivý; podobné podivnosti probereme později. Pravdivý je i výrok (k). Platnost (n) závisí na konvenci, obvykle ho však považujeme za nepravdivý, neboť levé straně rovnosti nedáváme smysl. Platnost (o) nejspíš nebudeme schopni dokázat, jedině vyvrátit (v případě, že potkáme jinou technologickou civilizaci, než je ta naše).

Je snad jasné, že zvolání typu (c) a (f) nemají žádnou pravdivostní hodnotu (tj. nejedná se ani o pravdy ani o nepravdy), a nejde tedy o výroky.

(2) Probereme všechny složené výroky jeden po druhém.

(i) Výrok je nepravdivý, a to bez ohledu na počasí: uvedené podmínky (a) a (b) se navzájem vylučují.

(ii) Nejde o výrok, neboť (c) není výrok.

(iii) Výrok platí, protože (k) platí, což stačí; pravdivostní hodnota (b) nás už nezajímá.

(iv) Protože (g) neplatí, výrok ¬(g) je pravdivý.

(v) Protože nevíme nic o pravdivosti žádného z obou výroků (e) a (o), neznáme ani pravdivostní hodnotu tohoto složeného výroku. Pokud bychom však jednoho dne objevili jinou technologickou civilizaci, popř. zjistili, že Karel IV. byl 1.1.1348 zcela zdráv, znamenalo by to, že implikace (v) je pravdivá. Zkuste si rozmyslet – třeba s pomocí tabulky pravdivostních hodnot implikace (níže) – proč tomu tak je.

(vi) Jediné co můžeme říci je, že pokud mají oba výroky (a) a (o) stejnou pravdivostní hodnotu, ekvivalence platí, v opačném případě neplatí.

(vii) Zde předpoklad (g) naší implikace neplatí, implikace jako taková tedy automaticky platí (viz tabulku pravdivostních hodnot).

(viii) Implikace platí ze stejného důvodu jako v předchozím bodě.

(ix) Můžete si zkusit rozmyslet, že tento zdánlivě složitý výrok platí právě tehdy, když platí výrok (e). S trochou snahy to lze pochopit i „selským rozumem“, v dalším paragrafu se na to ale podíváme s pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(3) Kompletně doplněná tabulka pravdivostních hodnot vypadá takto. Je vidět, že skutečně platí (e) a (ix) mají ve všech možných případech stejnou pravdivostní hodnotu.

(a)	(e)	(a) $\wedge$ (e)	$\neg$(a)	$\neg$(a) $\wedge$ (e)	(ix)
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

(5) Kolik je celkem možných kombinací pravdivostních hodnot proměnných A, B a C? Protože jsou dvě možnosti (0 a 1) pro každou ze tří proměnných, máme celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ možností, a právě tolik řádků musí mít tabulka (k tomu ještě záhlaví).

Dále si musíme rozmyslet, jaké by vhodná tabulka měla mít sloupce. Jak už bylo naznačeno, první tři sloupce jsou jasné: A, B, C. Dále budou následovat: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$, $A \Rightarrow C$ a konečně (1.1). (Je asi jasné, že toto není jediné vhodné pořadí, ale že ne všechna pořadí fungují.) Takto sestavenou tabulku najdete hned v následujícím paragrafu (v zadání) a můžete si ji cvičně vyplnit.

(6) Kompletně vyplněná tabulka je níže. Jak jsme na to přišli? Věřím, že první dva sloupce jsou jasné, neboť jde o prosté dosazení tabulky pravdivostních hodnot implikace (tu je snadné si dokonce aktivně zapamatovat, protože třeba $A \Rightarrow B$ je nepravdivá v jediném případě: když $A \sim 1$ a $B \sim 0$). Další sloupec (konjunkce dvou implikací) je podobně přímočarý: vyplníme jedničku, pokud oba výroky spojené spojkou „$\wedge$“ jsou pravdivé, jinak vyplníme nulu.

Asi nejproblematičtější je vyplnění posledního sloupce, který obsahuje výrok složený pomocí implikace z výroků $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ (předpoklad) a $A \Rightarrow C$ (závěr). My ale víme, že implikace je nepravdivá pouze v případě, kdy její předpoklad je pravdivý a její závěr nepravdivý; takový řádek však v naší tabulce nenajdete. Ani v jednom řádku není u výroku $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ jednička (pravdivý předpoklad) a u $A \Rightarrow C$ nula (nepravdivý závěr). Protože ve všech ostatních případech je implikace pravdivá, je poslední sloupec správně vyplněn samými jedničkami.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	(1.1)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(7) Měli byste dospět k následující tabulce:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

(8) Další příklady podivných pravdivých implikací: „Protože $2 + 2 = 5$, New York je malé město.“ (Tento výrok je pravdivý podle prního řádku tabulky pravdivostních hodnot implikace.) „Protože $2+2 = 5$, New York je velké město.“ (Pravdivé podle druhého řádku tabulky.)

Nepravdivý (podle třetího řádku tabulky) nicméně je výrok „Protože 2+2=4, New York je malé město.“.

(12) Je asi jasné, že onen výrok lze vyjádřit nějak takto:

$$\forall \text{ velký obratlovec žijící v moři } x\colon\ x \text{ je ryba.} \tag{1.4}$$

To ovšem nepůsobí příliš elegantně, protože specifikace typu proměnné x je příliš dlouhá: požadujeme, aby proměnná x nabývala pouze takových „hodnot“, jimiž jsou velcí obratlovci žijící v moři; jiné hodnoty nepřipouštíme. Naštěstí existuje jiný způsob, jak vyjádřit totéž:

$$\forall x\colon\ x \text{ je velký obratlovec žijící v moři } \Longrightarrow\ x \text{ je ryba.} \tag{1.5}$$

Rozmyslete si, že oba zápisy vyjadřují totéž; přitom ve druhém zápisu nijak neomezujeme rozsah věcí, které může zastupovat x. Prostě říkáme, že pro jakoukoliv věc x, jestliže x je velký mořský obratlovec, pak x je ryba. (Neříkáme tedy nic o takových x, která nejsou velkými mořskými obratlovci, a je tedy jasné, že oba výroky říkají totéž.)

Jak ví každý, kdo nabyl aspoň základních znalostí biologie, uvažovaný výrok je nepravdivý: ne všichni velcí mořští obratlovci jsou ryby. (Například kytovci.) Pokud však místo obecného kvantifikátoru použijeme existenční, dostaneme pravdivý výrok:[5]

$$\exists \text{ velký obratlovec žijící v moři } x\colon\ x \text{ je ryba.} \tag{1.6}$$

Je známo, že tento výrok platí. Podívejme se ještě na jeho alternativní verzi, která se má k formulaci (1.6) zcela analogicky, jako (1.5) k (1.4). Použitím vhodné logické spojky se zbavíme nutnosti specifikovat „obor hodnot“ proměnné x:

$$\exists x\colon\ x \text{ je velký obratlovec žijící v moři } \wedge\ x \text{ je ryba.} \tag{1.7}$$

Zájemcům doporučuji podrobněji si rozmyslet, proč v případě existenčního kvantifikátoru je vhodnou spojkou „$\wedge$“ („a zároveň“) místo implikace, jak tomu bylo u kvantifikátoru obecného.

[5] Pro jistotu varuji, že se nejedná o negaci původního výroku (1.4). Aby šlo o negaci, muselo by za dvojtečkou stát „x není ryba“.

(13) Ekvivalentní dvojice: (a)–(2), (b)–(1), (c)–(4), (d)–(3).
Dvojice s opačným významem (vzájmně negace): (a)–(3), (b)–(4), (c)–(1), (d)–(2).

(14) Asi nejstručnější zápis zjištění o negaci výroku (1.2), která jsme učinili v tomto odstavci, je
$$\neg\big(\forall x \in V\colon x \in R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in V\colon x \notin R.$$

(15) Správné je nejprve ekvivalentně psát
$$\forall x\colon x \in V \Longrightarrow x \in R,$$
což už není problém zapsat pomocí nového značení jako
$$\forall x\colon \mathcal{V}(x) \Longrightarrow \mathcal{R}(x).$$

(16) Není těžké si rozmyslet, že správný symbolický zápis uvedeného výroku je
$$\forall z \in Z\ \exists m \in M\colon L_1(m, z).$$
Po přehození pořadí kvantifikátorů dostaneme výrok, který říká, že „existuje muž, který miluje každou ženu“. Je zřejmé že oba tyto výroky mohou být ekvivalentní jen za velmi speciálních okolností (např. v případě, že množiny M a Z jsou obě jednoprvkové). Obecně (a ve většině reálných situací) mají tyto výroky zcela odlišné, i když ne nezbytně protikladné významy. Lze si představit, že platí oba současně; v reálném světě je naopak pravděpodobné, že neplatí ani jeden. Mohl by platit i právě jeden z obou výroků. Záleží tedy na různých dalších okolnostech, které ovšem neznáme (resp. nejsou zadány – například ve formě axiomů), a nejsme tedy schopni rozhodnout o pravdivosti.

Už na tomto jednoduchém příkladu jste si tedy mohli uvědomit, že přehozením pořadí kvantifikátorů vznikne jiný výrok, který *nemusí mít s původním výrokem žádnou logickou souvislost*.

Poznámka. Námi zavedené a použité značení představuje *formální jazyk* použitelný pro budování nějaké teorie. Abychom však mohli teorii začít skutečně budovat, kromě vyjadřovacích prostředků (tj. formálního jazyka) potřebujeme ještě znát nějaké základní pravdy (axiomy) z nichž pak můžeme odvozovat pravdy další (věty, resp. teorémy). To momentálně není náš cíl, soustředíme se čistě na jazyk.

(17) Překlady do symbolického jazyka jsou následující.

(a) $\exists z \in Z\ \exists m \in M\colon S(m, z)$;

(b) $\forall m \in M\ \forall z \in Z\colon S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$;

(c) $\forall z \in Z\ \forall m_1 \in M\ \forall m_2 \in M\colon S(m_1, z) \wedge S(m_2, z) \Rightarrow m_1 = m_2$;

(d) $\forall m \in M\ \forall z_1 \in Z\ \forall z_2 \in Z\colon S(m, z_1) \wedge S(m, z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
Intuitivně je asi jasné, že tento výrok není ekvivalentní předchozímu, neboť si lze představit lidské společnosti, v nichž jeden výrok platí a druhý nikoliv, nebo naopak.

(e) $\exists m \in M\ \exists z \in Z\colon S(m,z)$.
Tento výrok je skutečně ekvivalentní (a) což je z jeho významu zřejmé. V tomto případě tedy na pořadí kvantifikátorů nezáleží.

(f) Uvědomme si, že výrok je formulován v množném čísle, musíme tedy konstatovat existenci dvou nevěrných manželek. Jedno správné řešení je (zkráceně zapsáno, takže např místo „$\exists z_1 \in Z\ \exists z_2 \in Z$“ píšu kratší „$\exists z_1, z_2 \in Z$“ apod.):

$$\exists z_1, z_2 \in Z\ \exists m_1, m_2, m_3, m_4 \in M\colon z_1 \neq z_2 \wedge m_1 \neq m_2 \wedge \\ \wedge m_3 \neq m_4 \wedge S(m_1, z_1) \wedge L_2(m_2, z_1) \wedge S(m_3, z_2) \wedge L_2(m_4, z_2).$$

Není snadné tuto formuli (nebo nějaký její ekvivalent) napsat správně hned na první pokus. Po prohlédnutí řešení je však jeho správnost snad jasná: tvrdí se existence dvou *různých* žen a 4 mužů, z nichž *dva a dva musí být různí* (celkový počet mužů může být 2, 3 nebo 4), aby prokazovali nevěrnost každé z obou žen. Všichni tito lidé musí splňovat nějaké relace (predikáty) a je zřejmé, že jsou potřeba právě ty, které jsou tam uvedené. Pokud bychom například vynechali požadavek $S(m_1, z_1)$, žena z_1 by nemusela být nevěrná (a výrok by to každopádně neříkal); pokud bychom tam naopak další požadavky přidali, mohlo by se stát, že výrok říká něco víc, než bylo v zadání, což nechceme.

Je dobré si všimnout, že striktně vzato má tento výrok 6 existenčních kvantifikátorů, které jsme ovšem pro přehlednost rozdělili do dvou „skupin“ (na ženy a muže). Protože všechny kvantifikátory jsou stejného typu (existenční), nezáleží na jejich pořadí. (Kdyby ovšem mezi nimi byl přimíchaný jeden obecný kvantifikátor, mohli bychom beztrestně permutovat pouze existenční kvantifikátory na jedné, resp. na druhé straně od obecného. Jakmile bychom však jeden existenční kvantifikátor přehodili na opačnou stranu od kvantifikátoru obecného, změnilo by to význam výroku.)

(g) Toto je těžký příklad, je určený spíše pro lidi s hlubším zájmem. Řešení je například formule

$$\forall z \in Z\ \forall m_1 \in M\ \exists m_2 \in M\colon S(m_1, z) \Longrightarrow L_1(m_2, z). \tag{1.8}$$

Existuje více způsobů, jak výrok (g) přepsat do našeho formalismu; tento je patrně nejelegantnější, není však snadné ho pochopit. Pojďme si rozmyslet, že uvedený zápis skutečně říká, co má.

Formule (1.8) říká, že pro libovolnou dvojici (m_1, z) existuje nějaký muž m_2 (nevylučujeme $m_1 = m_2$, ale ani to netvrdíme), který ženu z miluje za předpokladu, že dvojice (m_1, z) je sezdána. Pokud tedy máme libovolnou vdanou ženu z a m_1 je její manžel, tvrdí se existence m_2, který miluje z. Pokud m_1 naopak její manžel není, implikace za dvojtečkou je splněna automaticky[6]; to ovšem znamená že na jejím závěru (zde „$L_1(m_2, z)$“) vůbec nesejde, a implikace tak bude splněna pro libovolně zvolený prvek $m_2 \in M$. V tom případě tedy implikace nepožaduje nic. Jinými slovy, implikace za dvojtečkou něco tvrdí právě v případech, kdy platí $S(m_1, z)$, a v těchto případech je z vdaná.

[6]Viz první a druhý řádek tabulky pravdivostních hodnot implikace.

Nyní proberu několik možných chyb, kterých je možno se při řešení této úlohy dopustit. První z nich je druhý kvantifikátor v (1.8) nahradit existenčním: přece chceme vyjádřit, že žena z má nějakého manžela, tj. m_1 splňující $S(m_1, z)$ má *existovat*. Pak by ztěží dávalo smysl za dvojtečkou použít implikaci, a nabízí se tedy následující chybné řešení:

$$\forall z \in Z\ \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M \colon S(m_1, z) \wedge L_1(m_2, z).$$

Problém je v tom, že nyní tvrdíme, že všechny ženy jsou vdané (a každou miluje nějaký muž), což nebylo zadání. Pokud bychom se přece jen uchýlili k použití implikace, tj. napsali výrok

$$\forall z \in Z\ \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M \colon S(m_1, z) \Longrightarrow L_1(m_2, z),$$

pak by se tvrdilo velmi málo: ke splnění výroku by totiž ke každé ženě z najít nějakého muže m_1, pro nějž není splněn předpoklad implikace. Například v našem skutečném světě tak tento výrok rozhodně nemá požadovaný význam, protože pro každou ženu existuje nějaký muž m_1, který není její manžel. Co se děje s m_2 a závěrem implikace už nás tak vůbec nezajímá, výrok v našem světě triviálně platí a vůbec z něj neplyne, že by každou vdanou ženu někdo miloval.

Nepomůžeme si ani tím, že všechny tři kvantifikátory budou existenční.

(h) Možné řešení této těžké úlohy je třeba:

$$\forall m \in M\ \forall z_1 \in Z\ \exists z_2 \in Z \colon \big(S(m, z_1) \wedge L_1(m, z_1)\big) \Longrightarrow \big(z_1 \neq z_2 \wedge L_2(m, z_2)\big)$$

(18)

(i) Existuje svobodný muž.

(j) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku.

(k) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku.

(l) Každá žena, která někoho miluje, nemiluje některého muže, který miluje ji.

U tohoto posledního výroku si uvědomte důležitou věc: proměnná m se vyskytuje ve dvou různých existenčních kvantifikátorech, a tedy tyto dva případy mohou značit jiného muže. Asi přehlednější by bylo v druhém případě použít místo m jiného znaku, aby nemohlo dojít k tomuto omylu; striktně vzato to však není potřeba.

(19) Jedna možná formulace definice svobodného muže je:

Definice. Řekneme, že určitý prvek $m \in M$ je *svobodný muž*, pokud platí, že

$$\forall z \in Z \colon \neg S(m, z).$$

Některá slova v této formulaci přitom nejsou úplně podstatná. Mohli bychom například slovo „prvek“ nahradit slovem „muž“ nebo docela vynechat slovo „určitý“. Poněkud méně jasné je použití slova „pokud“; leckdo by byl spokojenější s logickou spojkou „právě když“. Existuje ovšem úzus, podle kterého v definicích myslíme těmito dvěma spojkami totéž, i když ve zbytku matematiky znamenají něco jiného (první z nich představuje implikaci (pozor na její směr!), druhá ekvivalenci). Mohli bychom tedy tutéž definici vyslovit třeba takto:

Definice. Muž $m \in M$ se nazývá *svobodný (muž)*, právě když $\forall z \in Z\colon \neg S(m, z)$.

Podstatné zde je, že obě uvedené definice (téhož pojmu) jsou srozumitelné a ucelené (!). Je jasné *co* (muže) nazýváme *jak* (svobodným) a *za jakých okolností* (platí-li onen výrok s jedním kvantifikátorem).

Pro přehlednost jsem si také v obou definicích dovolil zeleně zvýraznit m, tj. toho muže, o němž něco prohlašujeme. Je na tom snad vidět, že když se definice týká vlastnosti jistého objektu (zde m), musí se tento objekt vyskytovat také ve výroku, který onu vlastnost definuje, a to jako volná proměnná (tj. nesmí být v kvantifikátoru). Z toho je snad jasné, že třeba následující definice je chybná:

Definice (CHYBNÁ!)**.** Muž $m \in M$ je *svobodný*, pokud $\exists m \in M\ \forall z \in Z\colon \neg S(m, z)$.

Zde jsem oba výskyty m ve výroku na pravé straně definice označil červeně, protože nemají nic společného s tím m, o kterém je řeč. To je dáno tím, že je toto červené m ve výroku *vázáno* kvantifikátorem, navenek tedy nemá význam. Výrok totiž nezmění svůj význam, když všechny vázané výskyty jisté proměnné nahradíme jiným znakem, například

$$\exists \heartsuit \in M\ \forall z \in Z\colon \neg S(\heartsuit, z)\ :$$

i nadále se tvrdí *existence nějakého* muže s jistou vlastností. Ale to, že tento muž existuje, nám přece neříká nic o onom konkrétním muži m.

(20) Všechny následující definice lze jistě formulovat trochu jinými slovy, to podstatné by ale mělo zůstat stejně. Jsou zformulované takovým způsobem, aby obsah definovaných pojmů byl z nich jasný bez dalších komentářů. Je důležité naučit se formulovat definice a jednoznačně je odlišovat od matematických vět, tj. vlastně výroků. Pokud jste například svobodnou ženu definovali prostě napsáním „$\forall m \in M\colon \neg S(m, z)$“ nesplnili jste zadání, protože toto je nějaká výroková forma (s volnou proměnnou z), nikoliv ucelená definice, po jejímž přečtení lze rozumět nově definovanému pojmu *svobodné ženy*.

(1) Žena z se nazve *svobodná*, jestliže $\forall m \in M\colon \neg S(m, z)$.

(2) Muž z se nazve *ženatý*, právě když m není svobodný.

Zde jsme tedy použili už dříve definovaný pojem svobodného muže. Všimněte si, že negace vlastnosti být svobodný v

(3) Žena z je *šťastně vdaná*, pokud $\exists m \in M\colon S(m, z) \wedge L_1(m, z) \wedge L_2(m, z)$.

(4) Prvek $m \in M$ je je *nevěrný manžel*, pokud

$$\exists z_1, z_2 \in Z\colon z_1 \neq z_2 \wedge S(m, z_1) \wedge L_1(m, z_2).$$

(5) Využijeme už definovaných pojmů:

Definice. Řekneme, že muž m je *věrný manžel*, pokud m je ženatý a zároveň m není nevěrný manžel.

Zde tedy využíváme dvě předchozí definice: ženatého muže a nevěrného manžela. Všimněte si, že se jedná o zcela formální definici v našem formálním jazyce, ačkoliv neobsahuje žádné speciální značky, pouze česká slova. Je to dáno tím, že jsme tento formální jazyk už dříve rozšířili pomocí definic, které tato česká slova zahrnují. Kdybychom však tyto definice rozepsali, dostali bychom následující (hůře čitelnou, ale ekvivalentní) definici:

Řekneme, že muž m je *věrný manžel*, pokud platí

$$\neg\big(\forall z \in Z\colon \neg S(m,z)\big) \;\wedge\; \neg\big(\exists z_1, z_2 \in Z\colon z_1 \neq z_2 \wedge S(m,z_1) \wedge L_1(m,z_2)\big).$$

První část výroku říká, že m není svobodný, neboli je (podle definice) ženatý; druhá část říká, že není nevěrný (přesně podle definice z předchozího bodu). Asi nepřekvapí, že tento výrok je zbytečně složitý a dá se ekvivalentně zapsat o něco jednodušeji, zde nám však šlo o to rozepsat všechny definice zúčastněné v definici věrného manžela výše. Zdá se být z tohoto příkladu jasné, že používat (vhodné) definice přináší výrazné zvýšení přehlednosti.

Všimněte si ještě, že následující definice by byla chybná:

Definice (CHYBNÁ!)**.** Řekneme, že muž $m \in M$ je *věrný manžel*, pokud není nevěrný manžel.

Je zřejmé proč: leckterý muž není věrný manžel, a přesto není ani nevěrný manžel, je totiž svobodný. Pokud bychom ale pracovali v systému (tj. nějaké konkrétní lidské společnosti), v níž jsou všichni muži ženatí (například proto, že muž je v té společnosti *definován* jako ženatá osoba mužského pohlaví), byly by – v tomto konkrétním systému – obě definice vzájemně ekvivalentní.

(6) Prvek $m \in M$ nazveme *polygamistou* právě tehdy, když

$$\exists z_1, z_2 \in Z\colon z_1 \neq z_2 \wedge S(m,z_1) \wedge S(m,z_2).$$

(7) Řekneme, že žena z je *neodolatelná*, pokud $\forall m \in M\colon L_2(m,z) \Rightarrow L_1(m,z)$.

(8) Stačí vypsat ty tři podmínky a propojit je logickou spojkou „a zároveň“ (zde ji jednou vypíšu slovy a jednou pomocí značky $\wedge$).

Definice. Žena z se nazývá *svůdnice*, kdykoliv je neodolatelná a zároveň platí

$$\big(\exists m \in M\colon L_2(m,z)\big) \wedge \big(\forall m \in M\; \exists z_1 \in Z\colon L_2(m,z) \Rightarrow S(m,z_1)\big). \tag{1.9}$$

Pokud součástí naší definice je už nějaký dříve definovaný pojem (zde neodolatelná žena), můžeme ho do naší nové definice zakomponovat i takto:

Definice (ekvivalentní)**.** Neodolatelná žena z se nazve *svůdnice*, platí-li (1.9).

V první z obou uvedených definic je na „pravé straně definice“ jak formule (1.9), tak požadavek neodolatelnosti. V druhé definici je na pravé straně pouze ona formule. Jak je možné, že jsou si ekvivalentní? Je to dáno formulací na začátku druhé definice: uvažujeme totiž pouze ženy s vlastností neodolatelnosti a na žádné jiné ženy se tato definice nevztahuje. Výsledek ja tedy stejný.[7]

[7] Matematický, byť dost nepřirozený, příklad tohoto jevu jsou třeba následující dvě definice přirozených

čísel. (D1) Reálné číslo x je *přirozené*, pokud x je kladné a zároveň celé. (D2) Kladné reálné číslo x je *přirozené*, pokud x je celé. Obě definice říkají totéž.