Derivace a průběh funkce – příklady z písemných prací

Vyšetřete průběh následujících funkcí.

Příklad 1. $f(x) = |x| + \operatorname{arctg}(|x-1|)$

Návod: 1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.
3. Funkce není lichá, sudá, ani periodická.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (převáží člen $|x|$).
5. První derivace je

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{1+(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2} = -\frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2+1} & x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+(1-x)^2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+1} & 0 < x < 1 \\ 1 + \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2} = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2+1} & x > 1 \end{cases}$$

V bodech 0, 1 funkce derivace nemá, poněvadž limity derivací zleva a zprava v těchto bodech dávají

$$f'_-(0) = -\frac{3}{2},\ f'_+(0) = \frac{1}{2},\ f'_-(1) = 0,\ f'_+(1) = 2.$$

Odtud je zřejmé, že funkce je na $(-\infty, 0)$ klesající, na $(0,1)$ a $(1,+\infty)$ rostoucí, ze spojitosti pak plyne, že je rostoucí na $(0,+\infty)$.

Maxima a minima se může nabývat pouze v bodech, kde derivace neexistuje. Protože na okolí nuly derivace mění znaménko, je v bodě 0 (globální minimum), $f(0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Na okolí bodu 1 je funkce rostoucí, lokální extrém zde funkce nemá.

6. Druhá derivace je

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2} & x < 1,\ x \neq 0 \\ -\frac{2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2} & x > 1 \end{cases}$$

(Protože první derivace není v bodech $0, 1$ spojitá, nemůže mít funkce v těchto bodech druhou derivaci.) Odtud plyne, že funkce f je konkávní na $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ a $(1,+\infty)$. Funkce není konvexní ani konkávní na žádném okolí bodů 0 a 1 (lze upočítat z definice).

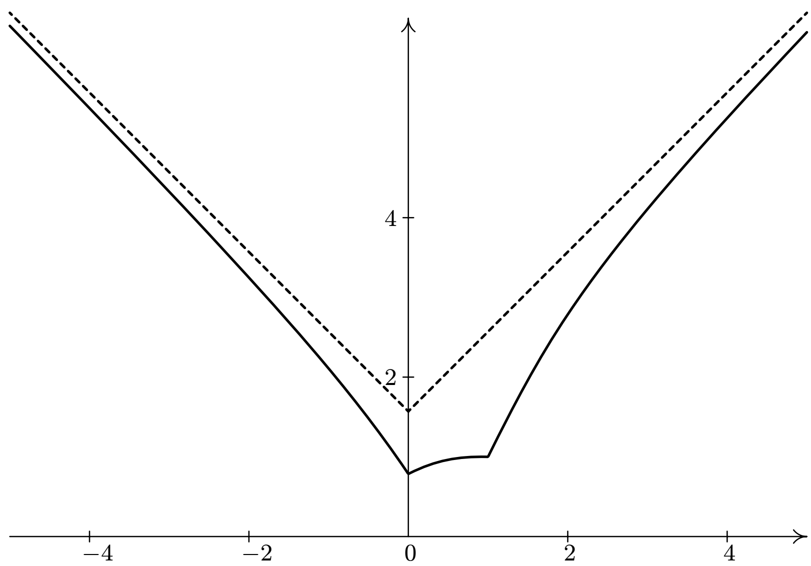
7. Asymptota v $-\infty$:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \qquad b_1 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \frac{\pi}{2} \implies y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

Asymptota v $+\infty$:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad b_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \frac{\pi}{2} \implies y = x + \frac{\pi}{2}.$$

8. Oborem hodnot je $H(f) = [f(0), +\infty) = [\frac{\pi}{4}, +\infty)$. Hodí se ještě spočíst, že $f(1) = 1$, neboť v tomto bodě se výrazně mění charakter funkce.



Příklad 2. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$

Návod: 1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \pm 1$.
2. Funkce je spojitá na $D(f)$.
3. Funkce je lichá, není sudá, není periodická.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm 1} = \pm\infty$.
5. První derivace je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x^4-3)}{(x^4-1)^{3/2}} & x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -\frac{x^2(x^4-3)}{(1-x^4)^{3/2}} & x \in (-1,+1) \end{cases}$$

V bodech ± 1 funkce derivace nemá.

Odtud je zřejmé, že funkce je rostoucí na $(-\infty, -\sqrt[4]{3})$, na $(-1,1)$ a na $(\sqrt[4]{3}, +\infty)$, na $(-\sqrt[4]{3}, -1)$ a $(1, +\sqrt[4]{3})$ je klesající.

Globální maxima a minima funkce nemá. V bodě $-\sqrt[4]{3}$ má lokální maximum $-\sqrt{2}\sqrt[4]{3^3}$, v bodě $\sqrt[4]{3}$ má lokální minimum $\sqrt{2}\sqrt[4]{3^3}$, neboť na okolí těchto bodů první derivace mění znaménko.

6. Druhá derivace je

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6x(x^4+1)}{(x^4-1)^{5/2}} & x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \frac{6x(x^4+1)}{(1-x^4)^{5/2}} & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Odtud plyne, že funkce f je konkávní na $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ a konvexní na $(0,1)$ a $(1,+\infty)$. Funkce má tedy v bodě 0 inflexní bod. Je $f(0) = 0$.

7. Asymptota v $-\infty$:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad b_1 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = 0 \implies y = x.$$

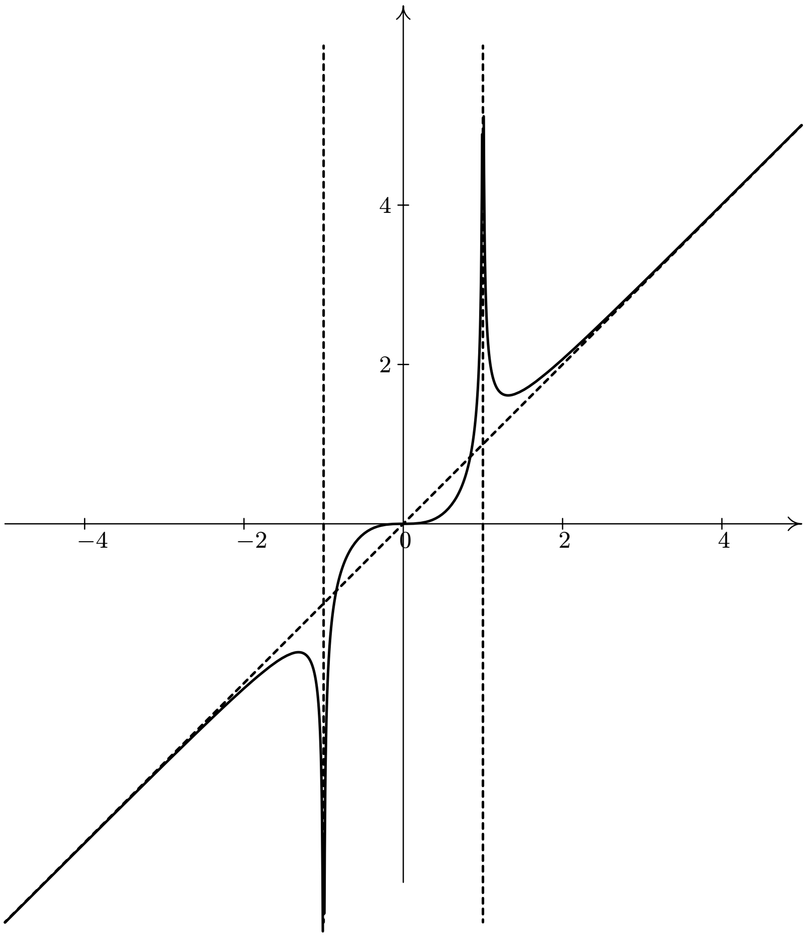
Asymptota v $+\infty$:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad b_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = 0 \implies y = x.$$

Asymptota $y = x$ je tedy společná pro obě nekonečna.

V bodech ± 1 má funkce asymptoty bez směrnice.

8. Oborem hodnot je $H(f) = \mathbb{R}$ (ze spojitosti na $(-1,1)$).



Příklad 3. $f(x) = |(1-x^2)e^{-x}|$

Návod: 1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.
3. Funkce není lichá, sudá, ani periodická.
4. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
5. O znaménku vnitřku absolutní hodnoty rozhoduje člen $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$. První derivace je tedy

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2-2x-1) & x \in (-1,1) \\ -e^{-x}(x^2-2x-1) & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

V bodech -1, 1 funkce derivace nemá, poněvadž limity derivací zleva a zprava v těchto bodech dávají

$$f'_-(-1) = -2e,\ f'_+(-1) = -2e,\ f'_-(1) = -2e^{-1},\ f'_+(1) = 2e^{-1}.$$

Protože $e^{-x} > 0$ na $\mathbb{R}$ a

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

je zřejmé, že funkce je klesající na $(-\infty,-1)$ a na $(1-\sqrt{2},1)$ a rostoucí na $(-1,1-\sqrt{2})$ a na $(1,1+\sqrt{2})$.

Extrémů se může nabývat pouze v bodech, kde je první derivace nulová a kde neexistuje = podezřelé body jsou $-1, 1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}$. Protože $f(\pm1) = 0$ a funkce f je nezáporná, má v bodech ±1 (globální) minimum. Protože na okolí bodů $1 \pm \sqrt{2}$ se mění monotonie, na levém okolí obou bodů je funkce klesající a na pravém rostoucí má v bodech $1 \pm \sqrt{2}$ lokální maxima.

6. Druhá derivace je

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2-4x+1) & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ -e^{-x}(x^2-4x+1) & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Platí, že

$$\begin{array}{ll} f''(x) = 0 & x \in \{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\} \\ f''(x) > 0 & x \in (-\infty,-1) \cup (2-\sqrt{3},1) \cup (2+\sqrt{3},+\infty) \\ f''(x) < 0 & x \in (-1,2-\sqrt{3}) \cup (1,2+\sqrt{3}) \end{array}$$

Na příslušných intervalech, kde je $f''(x) > 0$ je funkce konvexní, na příslušných intervalech, kde je $f''(x) < 0$ je funkce konkávní. V bodech $2 \pm \sqrt{3}$ má inflexní body.

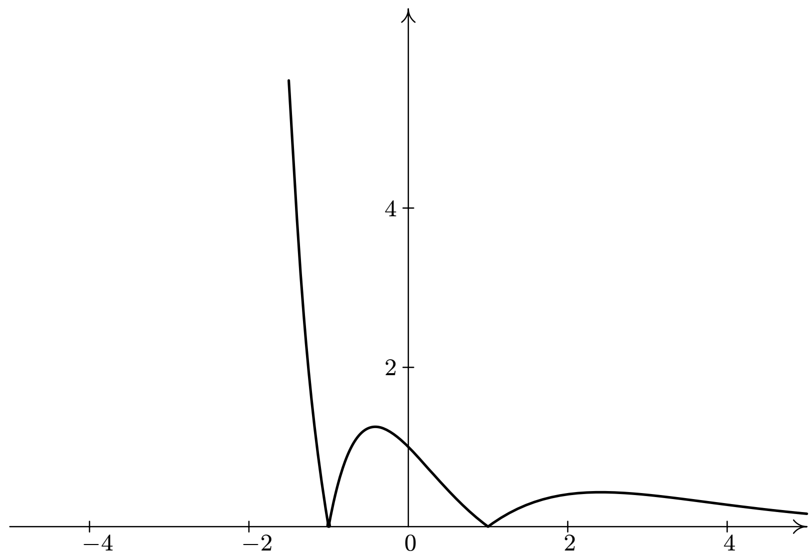
7. Asymptota v $-\infty$:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \qquad \text{asymptotu nemá.}$$

Asymptota v $+\infty$:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad b_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = 0 \implies y = 0.$$

8. Oborem hodnot je $H(f) = [0,+\infty)$.



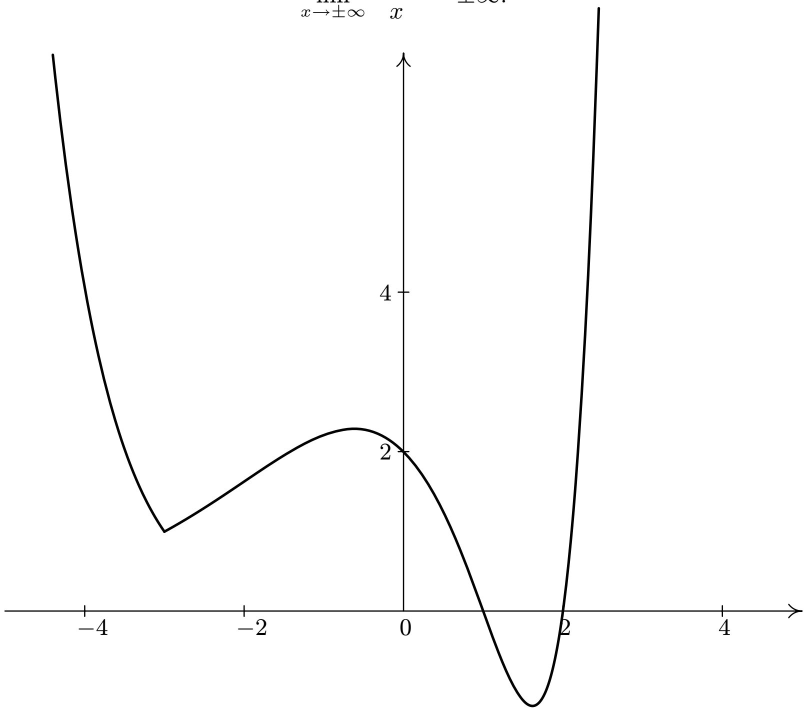
Příklad 4. $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\exp(|x+3| - 3)$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 - x - 1) & x \in (-3, +\infty) \\ -e^{-6-x}(x^2 - 5x + 5) & x \in (-\infty, -3) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x-1)(x+2) & x \in (-3, +\infty) \\ -e^{-6-x}(x-5)(x-2) & x \in (-\infty, -3) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty.$$



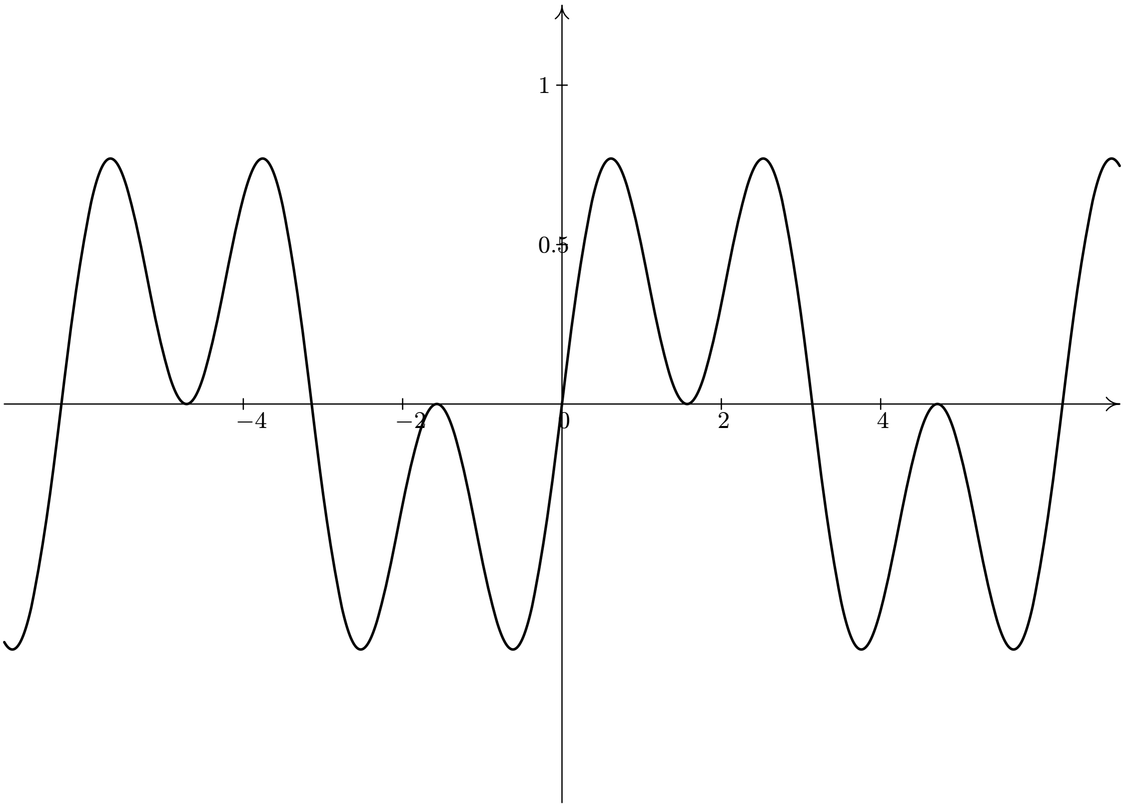
Příklad 5. $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(2x)$

Návod:

$$f'(x) = 2\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$f''(x) = -4\cos 2x \sin x - 5\cos x \sin 2x$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{neex.}$$



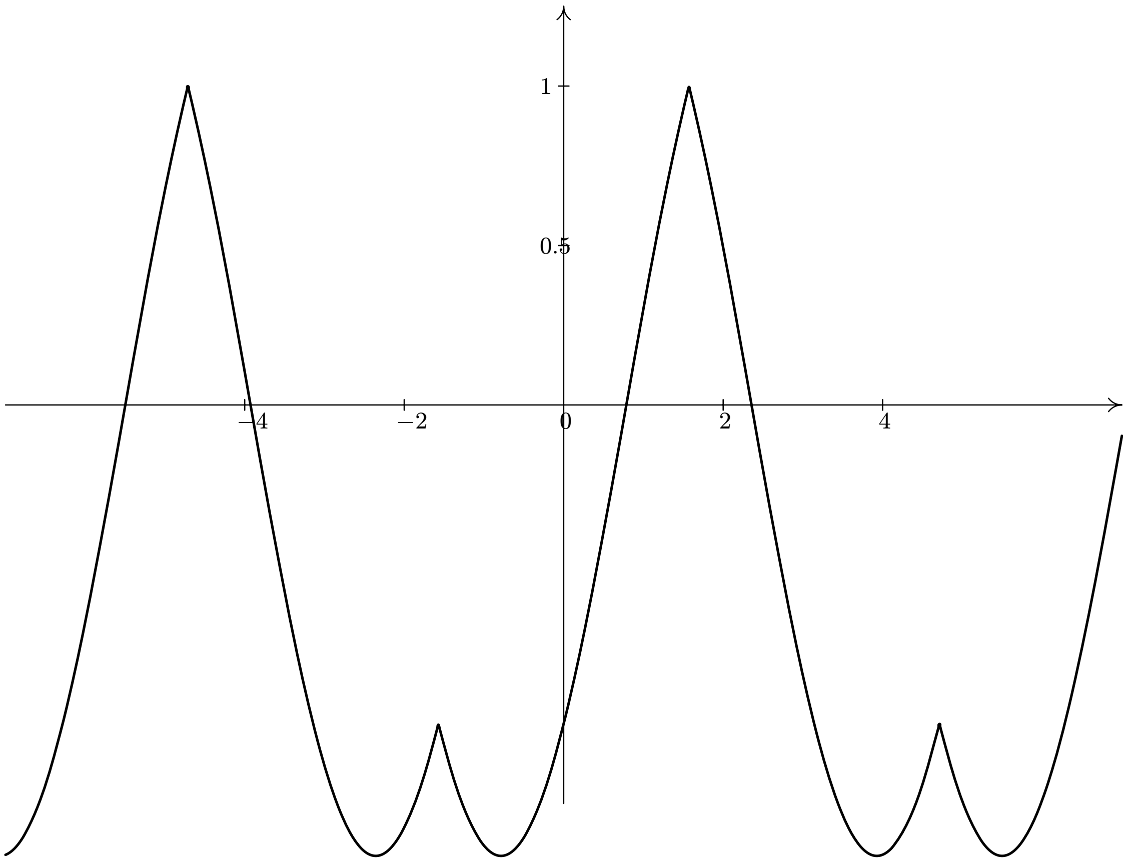
Příklad 6. $f(x) = \sin x - |\cos x|$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x + \sin x & \cos x > 0 \\ \cos x - \sin x & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x & \cos x > 0 \\ -\sin x - \cos x & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 0 \cdot x = \text{neex.}$$



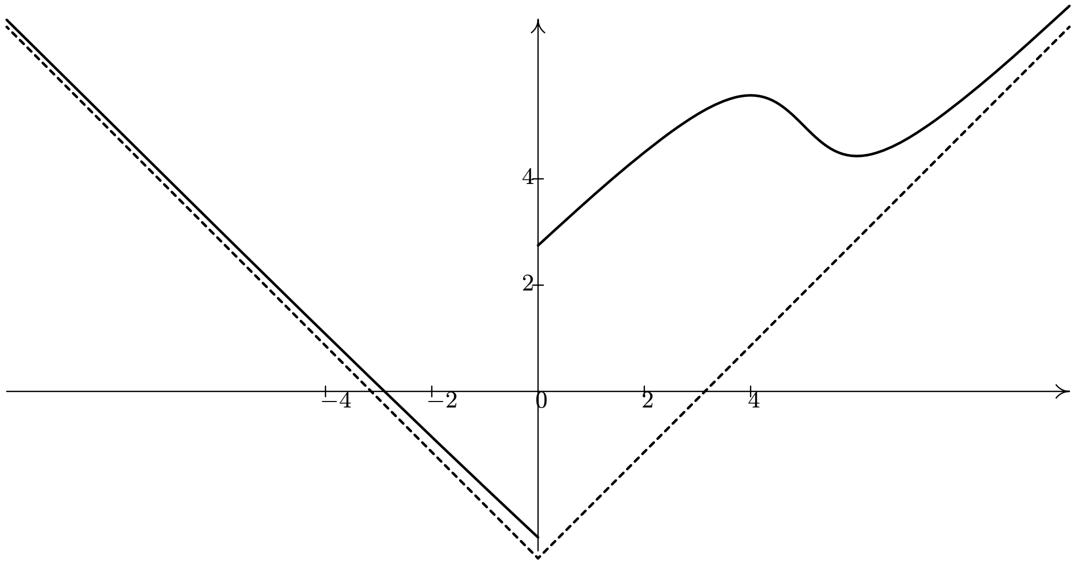
Příklad 7. $f(x) = (x - 2\operatorname{arctg}(x-5)) \cdot \operatorname{sgn}(x)$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{(x-6)(x-4)}{x^2-10x+26} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{(x-6)(x-4)}{x^2-10x+26} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4(x-5)}{(x^2-10x+26)^2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{4(x-5)}{(x^2-10x+26)^2} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \pm x = -\pi$$



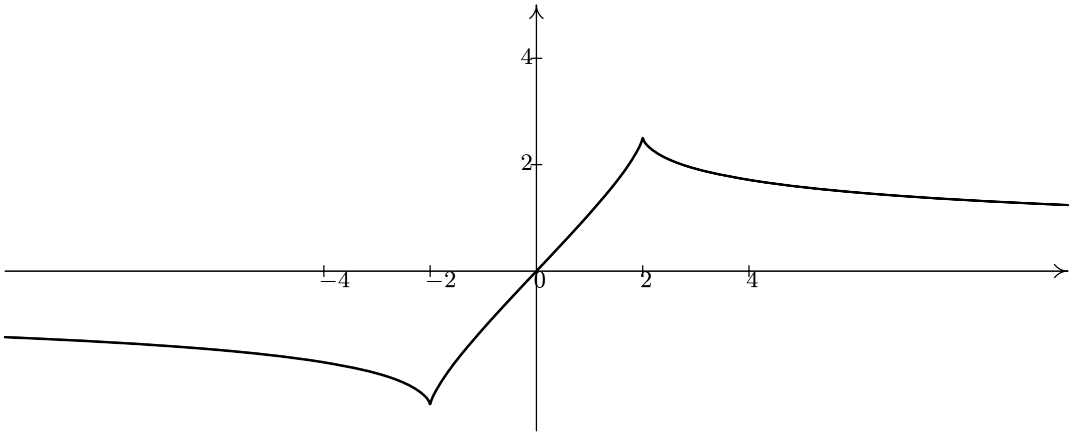
Příklad 8. $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Návod:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right) \qquad x \neq \pm 2$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right) \qquad x \neq \pm 2$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = 0.$$



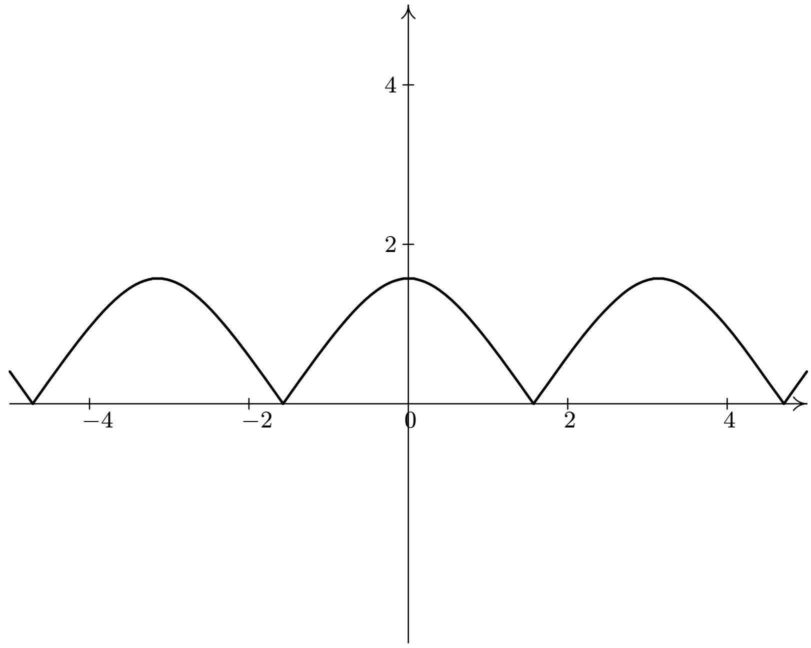
Příklad 9. $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-\sin^4 x})$

Návod:

$$f'(x) = -\frac{2\cos x \sin x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$f''(x) = -\frac{2\cos^4 x}{\sqrt{(1-\sin^4 x)^3}} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = \text{neex.}$$



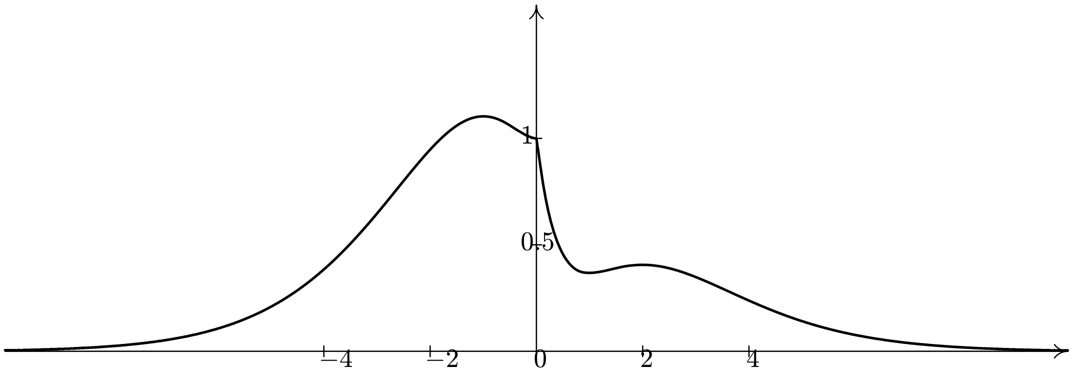
Příklad 10. $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-|x|}$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x x(x+1) & x < 0 \\ -e^{-x}(x-2)(x-1) & x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x^2+3x+1) & x < 0 \\ e^{-x}(x^2-5x+5) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = 0$$



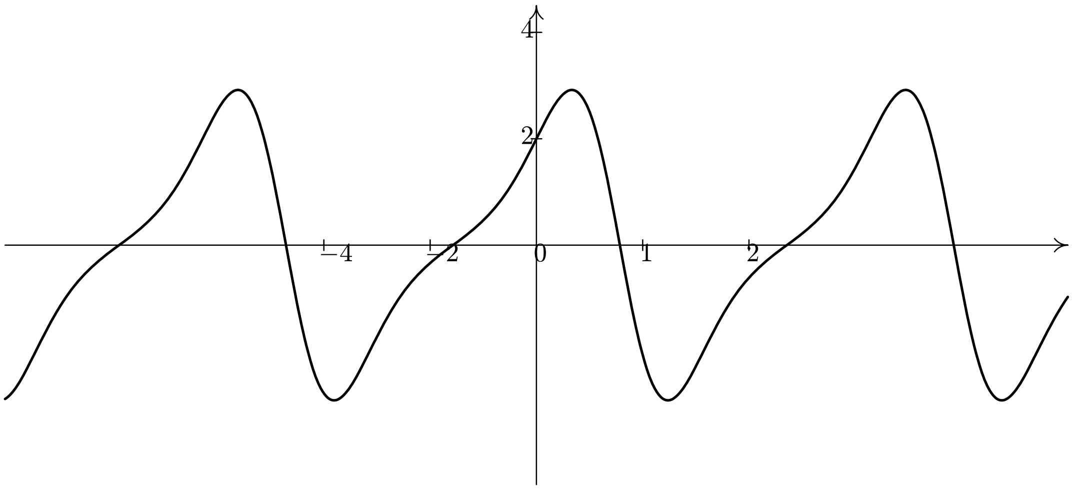
Příklad 11. $f(x) = e^{\sin x}\cos x$

Návod:

$$f'(x) = -e^{\sin x}(\sin x - \cos^2 x)$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\cos x(\cos^2 x - 3\sin x - 1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = \text{neex.}$$



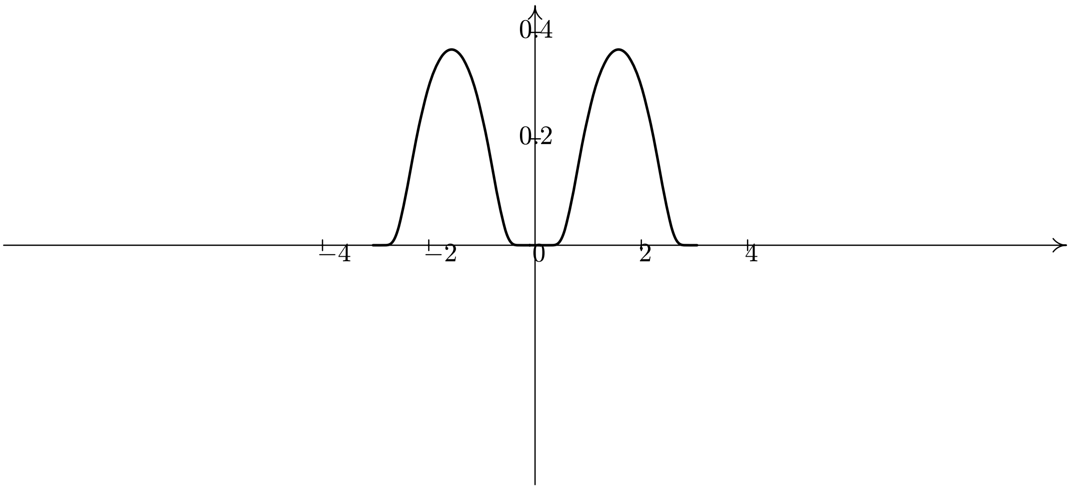
Příklad 12. $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $f(k\pi) = 0$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$.

Návod:

$$f'(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi, \qquad f'(k\pi) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\frac{1}{\sin^6 x}(1 + 6\cos 2x + \cos 4x) \quad x \neq k\pi$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = \text{neex.}$$



Příklad 13. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$

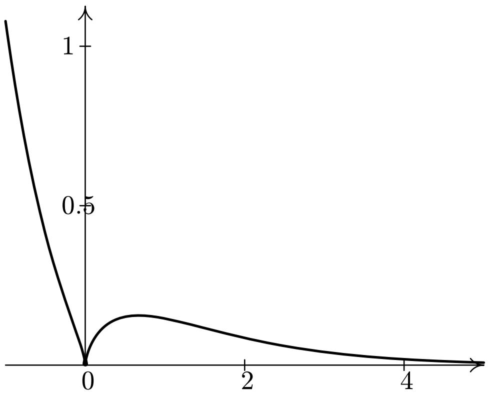
Návod:

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}x(3x-2)}{3x^{4/3}}$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(9x^2-12x-2)}{9x^{4/3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \text{asymptota v } -\infty \text{ není}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - 0\cdot x = 0.$$



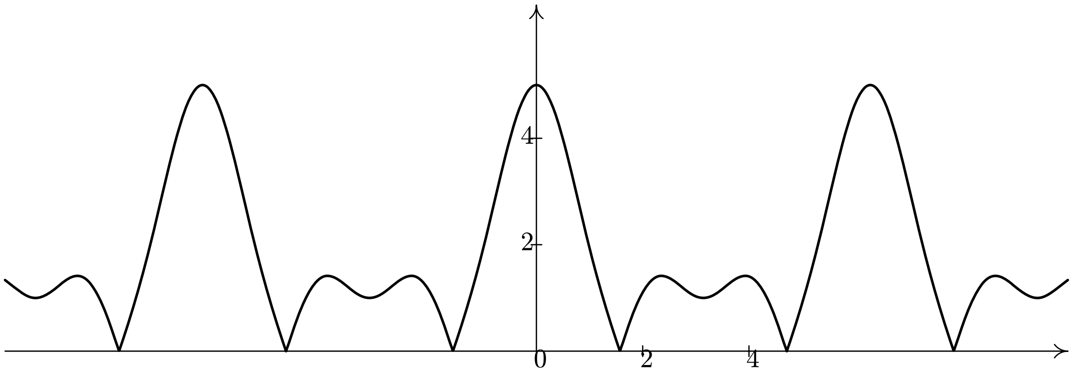
Příklad 14. $f(x) = |3\cos x| + 2\cos^3 x$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} -3\sin x - 6\cos^2 x\sin x & \cos x > 0 \\ 3\sin x - 6\cos^2 x \sin x & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -3\cos x + 12\cos x\sin^2 x - 6\cos^3 x & \cos x > 0 \\ 3\cos x + 12\cos x\sin^2 x - 6\cos^3 x & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = \text{neex.}$$



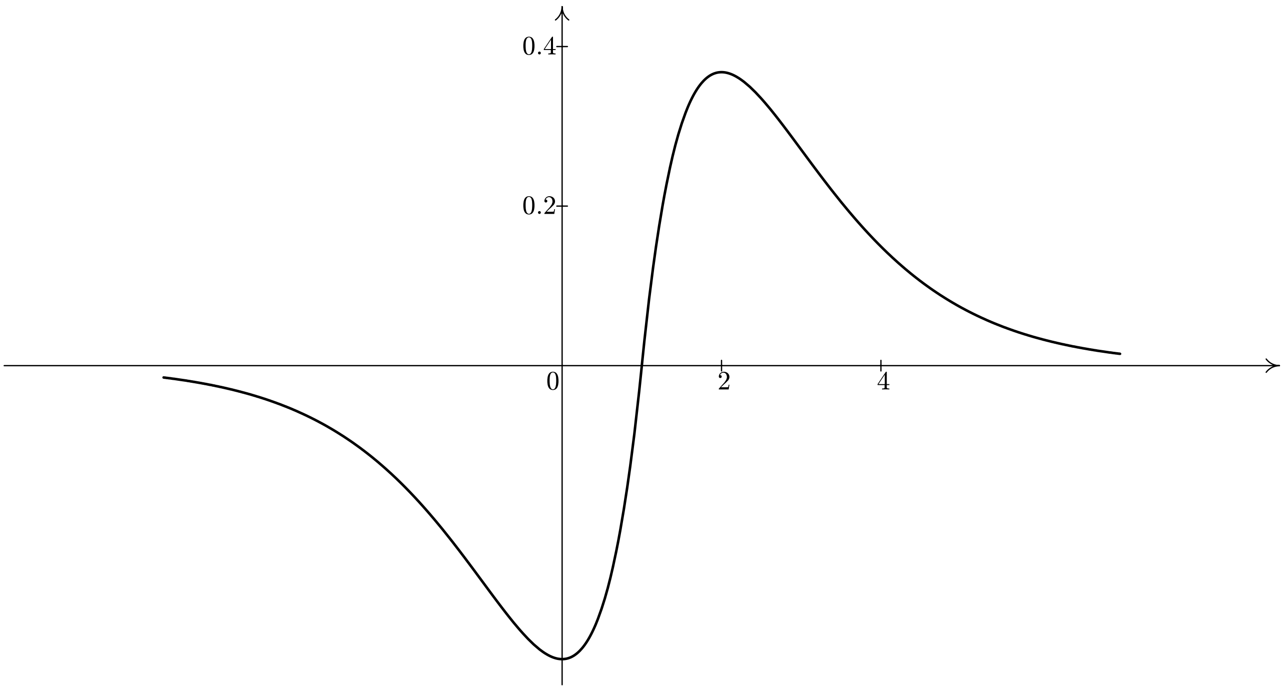
Příklad 15. $f(x) = (x-1)e^{-|x-1|}$

Návod:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x}(x-2) & x > 1 \\ xe^{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{1-x}(x-3) & x > 1 \\ e^{x-1}(x+1) & x < 1 \end{cases}$$

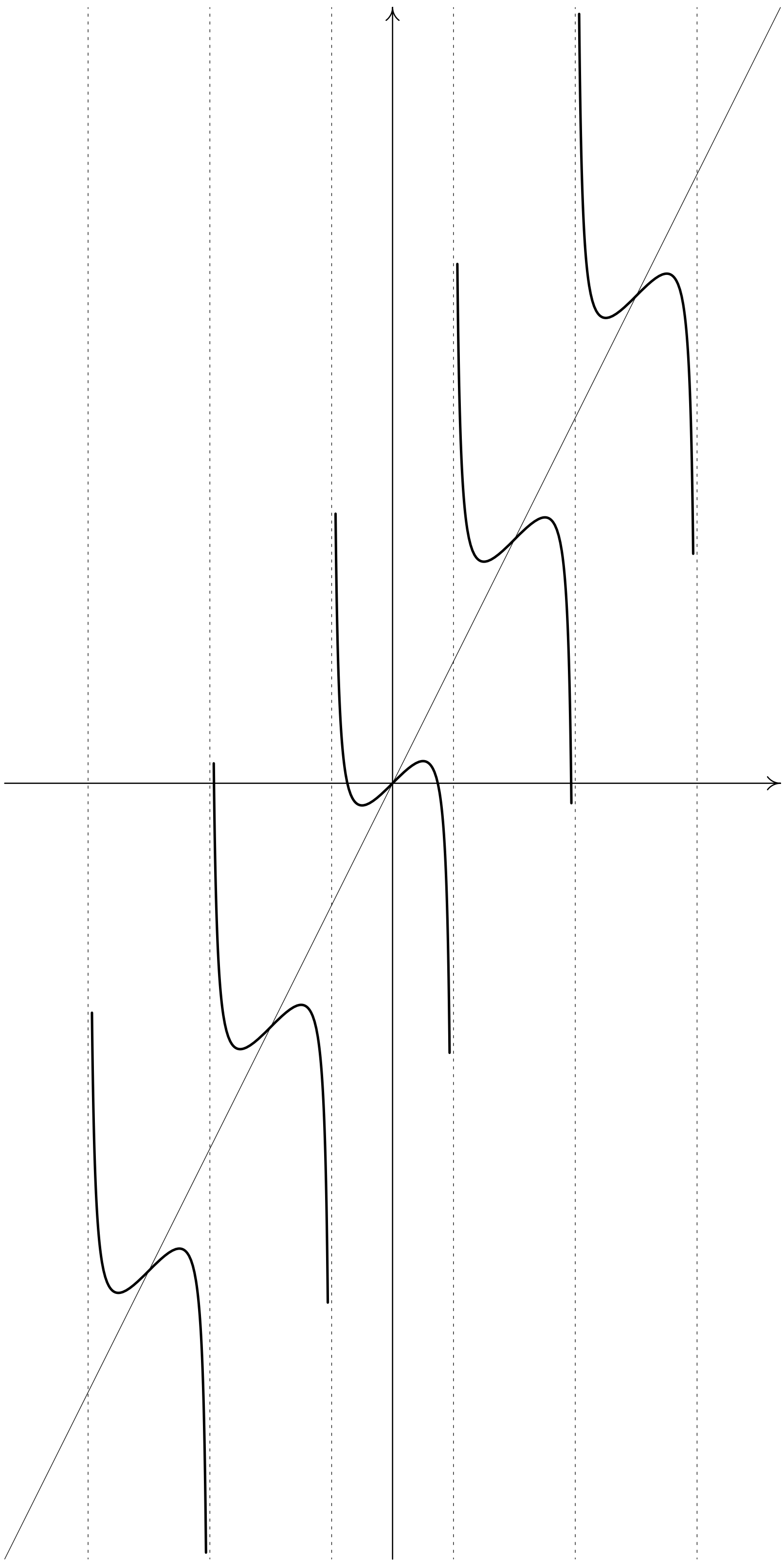
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0\cdot x = 0.$$



Příklad 16. $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$

Návod:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$f''(x) = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{neex.}$$



Příklad 17. $f(x) = \arcsin\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$

Návod: Definiční obor:

$$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1$$

$$\frac{2-3x}{1-2x} \geq 0 \ \wedge \ \frac{x}{1-2x} \leq 0$$

odtud plyne, že

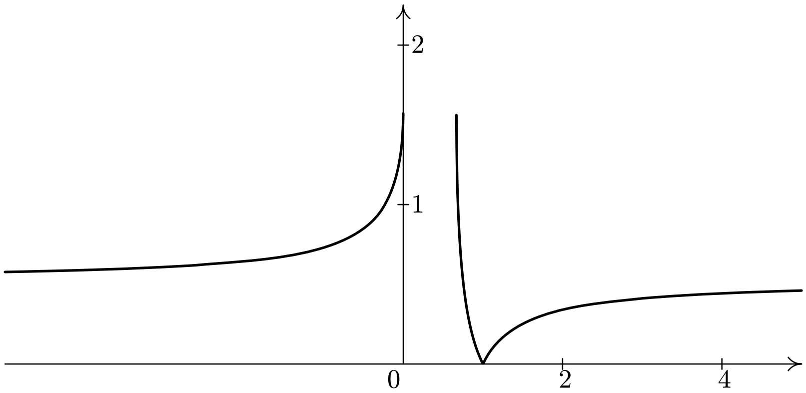
$$D(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$$

Derivace.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x-1)^2\sqrt{\frac{x(3x-2}{(2x-1)^2}}} & 0 < \frac{1-x}{1-2x} < 1 \\ -\frac{1}{(2x-1)^2\sqrt{\frac{x(3x-2}{(2x-1)^2}}} & -1 < \frac{1-x}{1-2x} < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^5\left(\frac{x(3x-2)}{(2x-1)^2}\right)^{3/2}} & 0 < \frac{1-x}{1-2x} < 1 \\ \frac{12x^2-9x+1}{(2x-1)^5\left(\frac{x(3x-2)}{(2x-1)^2}\right)^{3/2}} & -1 < \frac{1-x}{1-2x} < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 0 \cdot x = \frac{\pi}{6}.$$



Příklad 18. $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Návod: Využijte substituce $x = \operatorname{tg} y$ (je možná na celém $\mathbb{R}$), faktu, že

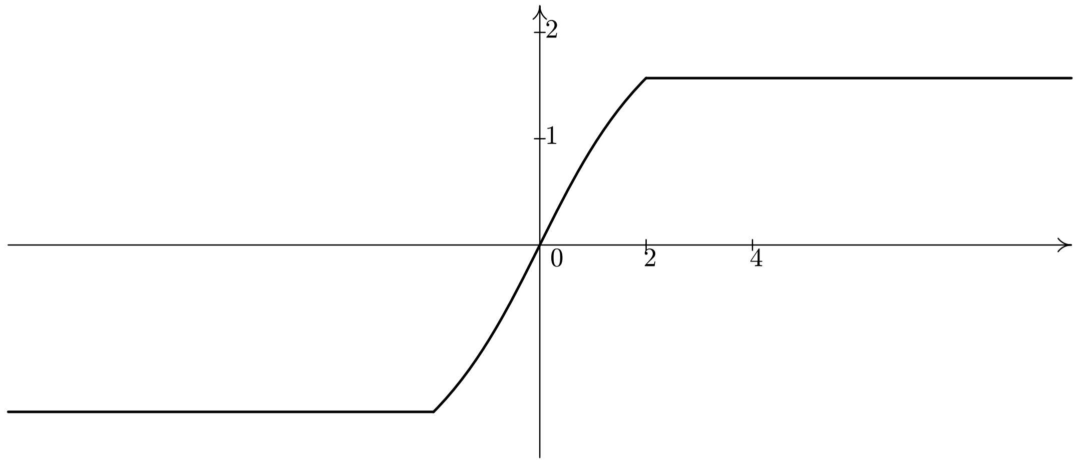
$$\frac{2\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \sin(2y)$$

a faktu, že

$$\arcsin(\sin z) = \begin{cases} z & z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -\pi - z & z \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \pi - z & z \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Dostanete tak, že

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x \in (-\infty, -1) \\ 4\operatorname{arctg} x & x \in (-\infty, -1) \\ \pi & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$


2
1
0
2
4

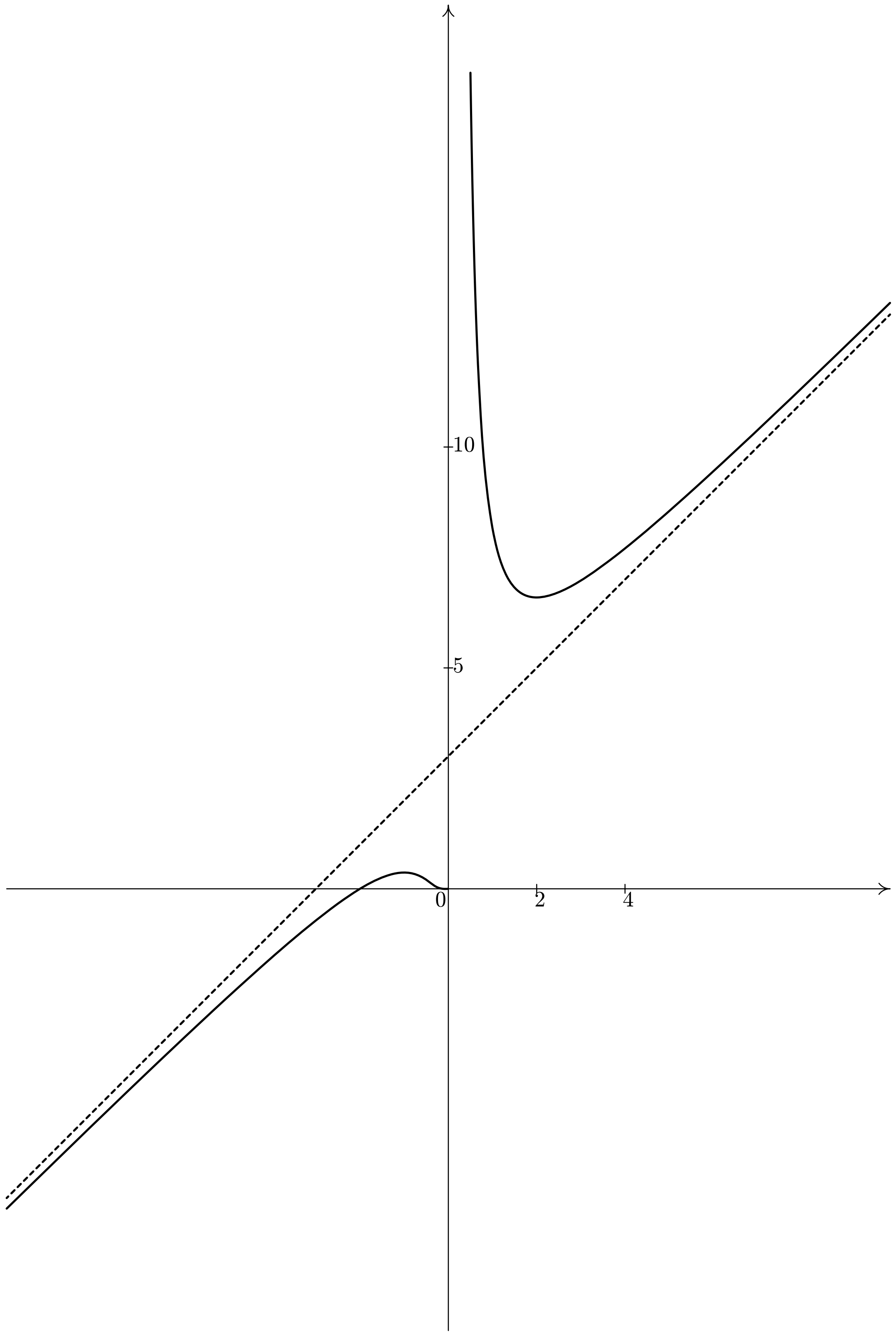
Příklad 19. $f(x) = (x+2)e^{1/x}$

Návod:

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}(x-2)(x+1)}{x^2},\ x \neq 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4},\ x \neq 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = 3.$$



Příklad 20. *Pro funkci f určete intervaly monotonie, intervaly konvexity/konkávnosti a obor hodnot:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

[rostoucí na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,+\infty)$; konvenxní na $(-\infty,-1)$ a $(-1,-1/2)$, konkávní na $(-1/2,+\infty)$. $H(f) = (-\pi/2,\pi/4)\cup(\pi/4,\pi/2)$.

Příklad 21. *Pro funkci f určete asymptoty v $+\infty$, v $-\infty$ a určete obor hodnot:*

$$f(x) = \log\left(e^{x+1} + \frac{1}{x^2}\right).$$

[asymptota v $+\infty$: $y = x+1$; asymptota v $-\infty$ neexistuje. $H(f) = \mathbb{R}$.]

Příklad 22. *(a) Nalezněte obor hodnot funkce $f(x) = e^x - 6\alpha x$ v závislosti na parametru α.*
(b) Rozhodněte, pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ je funkce $g(x) = e^x - \alpha x^3$ konvexní na $\mathbb{R}$.

[(a) pro $\alpha < 0$ je $H(f) = \mathbb{R}$, pro $\alpha = 0$ je $H(f) = (0,+\infty)$, pro $\alpha > 0$ je $H(f) = [6\alpha(1-\log(6\alpha)),+\infty)$. (b) Funkce g je konvexní na $\mathbb{R}$, pokud $\alpha\in[0,e/6]$.]

Příklad 23. *Pro funkci $f(x) = e^{\arcsin x}$ určete $D(f)$, intervaly konvexity a konkávnosti, inflexní body a spočtěte tečny v inflexních bodech.*

[$D(f) = [-1,1]$, $f''(x) = \frac{e^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)^{3/2}}$, $-1/\sqrt{2}$ je inflexní bod, konkávní na $x\in(-1,-1/\sqrt{2})$, konvexní na $x\in(-1/\sqrt{2},1)$. $f'(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$, tečna má směrnici $f'(-1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-\pi/4}$, tečna prochází bodem $[-1/\sqrt{2},e^{-\pi/4}]$, má tedy tvar $y = \sqrt{2}e^{-\pi/4}\cdot x + 2e^{-\pi/4}$]

Příklad 24. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$, $f(0) = 1/\sqrt{e}$.

[$f'(x) = (\cos x)^{1/x^2} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot (\frac{2 \log \cos x}{x} + \operatorname{tg} x)$ na $D(f) \setminus \{0\}$, $f'(0) = 0$.]

Příklad 25. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = \arcsin(1 - x^4)$

[$f'(x) = \frac{-4x^3}{\sqrt{2x^4 - x^8}}$ pro $x \in (-\sqrt[4]{2}, +\sqrt[4]{2}) \setminus \{0\}$, $f'(0) = 0$, $f'_-(\sqrt[4]{2}) = -\infty$, $f'_+(-\sqrt[4]{2}) = \infty$]

Příklad 26. *Zjistěte, kde má funkce f derivaci. Zjistěte, kde je f spojitá.*
$f(x) = (x-1)^2 x \cos(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1})$ *pro* $x \neq 0, 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

[Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ a derivaci má v každém bodě vyjma nuly.]

Příklad 27. *Rozhodněte, zda existuje c tak, že funkce f má v bodě 2 vlastní derivaci.*
$f(x) = 2^{2^x}$ *pro* $x \geq 2$, $f(x) = 2^{x^2} + c(x-2)$ *pro* $x < 2$.

[$c = 64 \log 2(\log 2 - 1)$]

Příklad 28. *Spočtěte derivaci funkce f v bodě 1.*
$f(x) = \left|\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right| + |x-1|$.

[0]

Příklad 29. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = \max\{1, e^{\sin x}\}$

[$f'(x) = 0$ pro $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$ pro $x \in (0, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'_+(2k\pi) = 1$, $f'_-(2k\pi) = 0$, $f'_+((2k+1)\pi) = 0$, $f'_-((2k+1)\pi) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$.]

Příklad 30. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.* [..] *znamená celou část.*
$f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x\right] \cdot \sin(\pi x)$

[$x \notin \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ je $f'(x) = [\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x] \cdot \pi \cos(\pi x)$, $f'_-(-1) = 2\pi$, $f'_+(-1) = \pi$, $f'_-(0) = f'_+(1) = -\pi$, $f'_-(1) = f'_+(0) = 0$.]

Příklad 31. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = |\sin 2x| \cdot \sin x$

[Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ je $f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2x) \cdot 2\cos 2x \cdot \sin x + |\sin 2x| \cdot \cos x$; $f'(k\pi) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$; $f'_+(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^{k+1}$ pro $k \in \mathbb{Z}$.]

Příklad 32. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = (x^2 + x) \cdot \sqrt{1 - \cos x}$

[$f'(x) = (2x+1)\sqrt{1 - \cos x} + (x^2 + x) \cdot \frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; $f'(0) = 0$; $f'_+(2k\pi) = (4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $f'_-(2k\pi) = -(4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$, pokud $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.]

Příklad 33. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.* [..] *značí celou část.*
$f(x) = (\max\{x, 1\})^{[x]}$

[$f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) = [x]x^{[x]-1}$ pro $x \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$; Pro $k \in \mathbb{N}$ je $f'_+(k) = k^k$, $f'_-(1) = 0$ a $f'_-(k) = +\infty$ pro $k > 1$.]

Příklad 34. *Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce f všude, kde existují.*
$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}$

[$f'(x) = 0$ pro $x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(x) = -\sin x$ pro $x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'_+(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$, $f'_-(\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$, $f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2$, $f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2$, $k \in \mathbb{Z}$]

Příklad 35. *(**) Spočtěte derivaci funkce f všude, kde existuje.*
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *pro* $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

[$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ pro $x \neq 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)/x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots) - x}{x^2} = 0$.]