III. SPOJITOST V METRICKÝCH PROSTORECH

Def: Ať (M,d), (N,e) jsou M.P., $f: M \to N$, $a \in M$.

- f je <u>spojitá v a</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M$:
$$\left(d(x,a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon \right)$$
- f je <u>spojitá na M</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\forall a \in M$: f je spoj. v a
- f je <u>K-LIPSCHITZOVSKÁ</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\forall x,y \in M$:
  $(K > 0)$ $$e(f(x), f(y)) \le K \cdot d(x,y)$$
- f je LIPSCHITZOVSKÁ $\overset{df}{\equiv}$ $\exists K > 0$: f je K-LIPSCHITZ.

FAKTA: f je K-Lipschitz $\Rightarrow$ je SPOJ.

Dk: Pro $\varepsilon > 0$, volím $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Pak $d(x,a) < \delta$
$$\Rightarrow e(f(x), f(a)) \le K\, d(x,a) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

ZNAČENÍ: Ať (M,d) je M.P., $A \subseteq M$, $x \in M$. Pak
$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf \{ d(x,a) ;\ a \in A \}$$

LEMMA: Ať (M,d) je M.P., $A \subseteq M$. Pak

(i) $\forall x \in M$: $d(x, A) = d(x, \overline{A})$

(ii) $\forall x \in M$: $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$

(iii) Funkce $\operatorname{dist}(\cdot, A): M \to \mathbb{R}$ je 1-lipschitzovská!
$$\operatorname{dist}(\cdot, A)(x) = \operatorname{dist}(x, A)$$

Dk: (i) „$\geq$" jasné (INF přes menší množinu)

„$\leq$" Pro $n \in \mathbb{N}$, zvol $y_n \in \overline{A}$:
$$d(x, y_n) < \operatorname{dist}(x, \overline{A}) + \frac{1}{n}$$

Dk.:

Zvol dále $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n}) \cap A$

Pak $\underset{\text{dist}(x,A)}{\overset{x_n \in A}{\le}} d(x,x_n) \le d(x,y_n) + d(y_n,x_n)$

$< \text{dist}(x,\bar{A}) + \frac{2}{n}$

Celkem: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\text{dist}(x,A) < \text{dist}(x,\bar{A}) + \frac{2}{n}$

$\Rightarrow \text{dist}(x,A) \le \text{dist}(x,\bar{A})$.

(ii) BÚNO A je uz. (díky (i))

„$\Leftarrow$" jasné (DO INF DOSAĎ $x = a$)

„$\Rightarrow$" $\forall n \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ protože $d(x,A) = 0$

Pak ale $\underset{A}{\underset{\cap}{x_n}} \to x \underset{A \text{ je uz.}}{\Rightarrow} x \in A$

(iii) Zvol $x,y \in M$. BÚNO $d(x,A) \ge d(y,A)$. Fix $n \in \mathbb{N}$.
Zvol $y_n \in A$: $d(y,y_n) < \text{dist}(y,A) + \frac{1}{n}$.

Pak $|d(x,A) - d(y,A)| = d(x,A) - d(y,A)$

$< d(x,y_n) - (d(y,y_n) - \frac{1}{n})$

$\le \frac{1}{n} + d(x,y_n) - d(y,y_n) \underset{\Delta\text{-NEROVNOST}}{\le} \frac{1}{n} + d(x,y)$.

$\underset{n \text{ bylo libovolné}}{\Rightarrow}$ $|d(x,A) - d(y,A)| \le 1 \cdot d(x,y)$

$\boxtimes$

<u>Lemma 10</u>: Ať (M,d) je M.P.

(i) $\forall x \ne y \in M \ \exists f: M \to \mathbb{R}$ 1-LIP., že $f(x) \ne f(y)$

(ii) Projekce $\pi_i: (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \to \mathbb{R}$ def. jako

$\pi_i(x_1, \dots, x_d) = x_i$

jsou 1-LIPSCHITZOVSKÉ (PRO KAŽDÉ $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$)

Dk: (i) Zvol $f := d(\cdot, \{x\})$ $\left(= d(\cdot, x)\right)$

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$:

$$|\pi_i(x_1,\dots,x_d) - \pi_i(y_1,\dots,y_d)| = |x_i - y_i| \leq \begin{cases} p=\infty: & \|\vec{x}-\vec{y}\|_\infty \\ p\neq\infty: & \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^p} \end{cases}$$

$\boxtimes$

<u>Izrek 11</u>: Ať (M,d), (N,e) jsou m.p., $f: M \to N$. [illegible]

(i) f JE SPOJ.

(ii) $f^{-1}(U)$ je ot. kdykoliv $U \subseteq N$ je ot.

(iii) $f^{-1}(F)$ je uz. —||— $F \subseteq N$ je uz.

Dk:

<u>(ii) ⟺ (iii)</u>: Z VĚTY 6 A TOHO, ŽE

$$f^{-1}(N \setminus U) = M \setminus f^{-1}(U)$$

<u>(i) ⟹ (ii)</u>: Zvol $U \subseteq N$ ot., $x \in f^{-1}(U)$.

Pak $f(x) \in U \underset{U \text{ ot.}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0: B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$.

$\underset{f \text{ spoj.}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$

Pak $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

<u>(ii) ⟹ (i)</u>: Zvol $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Pak

$x \in f^{-1}(\underbrace{B(f(x),\varepsilon)}_{\text{OT.}})$ je OT. dle (ii)

$\Rightarrow \exists \delta > 0: B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$

Tedy $d(x,y) < \delta \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$ $\boxtimes$

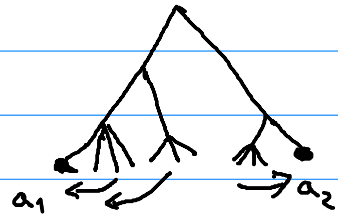
TĚŽŠÍ CVIČENÍ:

M ultrametrický, $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$.

Polož $f(x) := a_{\min(k;\ d(x,A) = d(x,a_k))}$. Pak $f: M \to A \subseteq M$

f je SPOJITÁ & $f \circ f = f$.

(DOKONCE LIP.)



Def ($\rightrightarrows$ SPOJITOST): Ať (M,d), (N,e) jsou M.P., $f: M \to N$.

Pak

(i) f je STEJNOMĚRNĚ SPOJITÁ, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in M: d(x,y) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(POZN.: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \exists \delta\ \forall y$ ---- SPOJITOST)

POZN.: ① f je $\rightrightarrows$ SPOJ. $\Rightarrow$ f je SPOJ.

ALE NAOPAK TO NEPLATÍ

PŘ.: $f(x) = x^2$ není $\rightrightarrows$ SPOJITÁ!:

$x_n = n^2 + \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$

Pak $|y_n - x_n| = \frac{1}{n} \to 0$

ale

$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left|2 n^2 \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \to \infty$$

POZN.: ② f je LIPSCHITZ $\Rightarrow$ f je $\rightrightarrows$ SPOJ.

[UK. VIZ ... POLOŽILI JSME $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, COŽ NEZÁVISÍ NA „x“]

ALE NE NAOPAK:

PŘ: $f(x) = \sqrt{x}$

je $\exists$ SPOJ:

Zvol $\varepsilon > 0$, položme $\delta = \varepsilon^2$, zvol x, y tž.
$|x-y| < \delta = \varepsilon^2$.

Pak

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 \leq \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right| = |x-y| < \varepsilon^2$$

tedy $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$

ale není LIP:

POLOŽ $x_n = 1/n$, $y_n = 0$, pak $\dfrac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \to \infty$

$\Rightarrow f$ není LIPSCHITZ.

(ii) f je IZOMETRIE pokud $\forall x, y \in M$: $d(x,y) = e(f(x), f(y))$.

POZN: IZOMETRIE $\Rightarrow$ 1-LIP.

$\not\Leftarrow$ PŘ: $f(x) = |x|$ pak $f(1) = f(-1) \Rightarrow f$ není ani prostá
$\ \ \|$
$\ d(x,0)$

(iii) f je HOMEOMORFISMUS pokud f je BIJEKCE & f^{-1} je SPOJ.
SPOJ.

POZN: IZOMETRIE $\overset{NA}{\Rightarrow}$ HOMEOMORFISMUS $\Rightarrow$ SPOJITOST

ale opačné implikace neplatí

PŘ: (1.) $f(x) = \operatorname{tg} x \restriction_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je HOMEOMORF.

$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ není IZOMETRIE

(2.) $f(x) = \sin x$ SPOJ ale ne HOMEOMORF.

Lemma 12: I interval, $f: I \to \mathbb{R}$ že $|f'(x)| \le C$, $x \in \mathrm{Int}(I)$

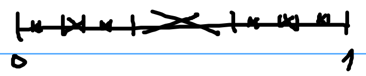
$\Rightarrow f$ je C-LIPSCHITZ

DK: Zvol $a < b \in I \overset{\text{LAGRANGE}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b): \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = |f'(\xi)| \le C$

$\Rightarrow |f(b)-f(a)| \le C\,|b-a|$ $\boxtimes$

ZAJÍMAVOST: CANTOROVO DISKONTINUUM

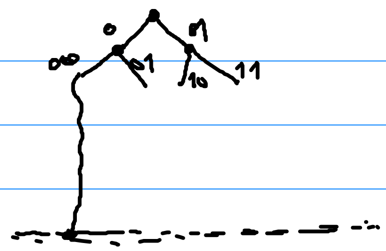
obr:



Uvažujme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ s metrikou $d(x,y) \overset{x \neq y}{=} \frac{1}{2^n}$, kde

$n = \min\{k;\ x(k) \neq y(k)\}$

obr:

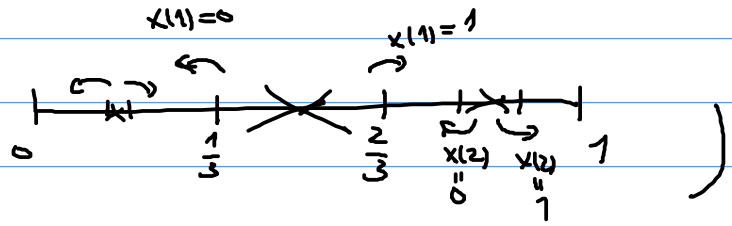


Uvažujme

$h: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$

definované jako $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,x(n)}{3^n}$

(POZN: $\mathrm{Rng}(h)$ JE CANTOROVO DISKONTINUUM!



)

CVIČENÍ (NE ÚPLNĚ LEHKÉ, ALE Z DEF):

h je HOMEOMORFISMUS