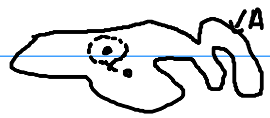
II. OTEVŘENÉ / UZAVŘENÉ MNOŽINY

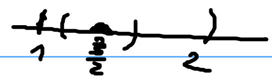
Def: Ať (M, d) je M.P., $A \subseteq M$. Pak

(i) $x_0 \in M$ je VNITŘNÍ BOD $A \overset{def}{\equiv} \exists R>0: B(x_0, R) \subseteq A$

ob.: 

$\mathrm{Int}(A) = \{x_0 \in M;\ x_0 \text{ je vnitřní bod } A\}$

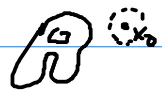
Pozn.: Zřejmě $\mathrm{Int}(A) \subseteq A$

Př.: $A = [1,2) \subseteq \mathbb{R}$, pak $3/2 \in \mathrm{Int}(A)$ ob.: 

(ii) $x_0 \in M$ je VNĚJŠÍ BOD $A \overset{def}{\equiv} \exists R>0: B(x_0,R) \subseteq M \setminus A$

$\mathrm{ext}(A) = \{x_0 \in M;\ x_0 \text{ je vnější bod } A\}$

Pozn.: Zřejmě $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{Int}(M \setminus A) \subseteq M \setminus A$

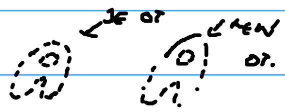
Př.: $A = [1,2) \subseteq \mathbb{R}$, pak $3 \in \mathrm{ext}(A)$ ob.: 

(iii) $x_0 \in M$ je HRANIČNÍ BOD $A \overset{def}{\equiv} x_0 \in M \setminus (\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{ext}(A))$

$(\Leftrightarrow \forall R>0: B(x_0,R) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset \ \& \ B(x_0,R) \cap A \neq \emptyset)$

$\partial A = \{x_0 \in M;\ x_0 \text{ je hraniční bod } A\}$

Př.: $A = [1,2) \subseteq \mathbb{R}$, $\{1,2\} \in \partial A$ ob. 

(iv) A je OTEVŘENÁ $\overset{def}{\equiv} A \cap \partial A = \emptyset$ ob. 

Pozn.:

A je OT. $\Longleftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$, tj. $\forall x_0 \in A$: x_0 je vnitřní bod A

$\ulcorner$ A ot. $\Longleftrightarrow \underbrace{A \cap (M \setminus \mathrm{Int}(A))}_{= A \setminus \mathrm{Int}(A)} = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq \mathrm{Int}(A) \Longleftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$ $\lrcorner$

Fakt 3: OT KOULE JE OT MNOŽINA

Dk.: Zvol $c \in M$, $R > 0$. Ať $x \in B(c,R) \left(= \{x;\ d(x,c) < R\}\right)$

CHCI: $\exists \tilde{R} > 0:\ B(x,\tilde{R}) \subseteq B(c,R)$

obr.: 

Polož $\tilde{R} := R - d(c,x) > 0$

Pak pro $y \in B(x,\tilde{R})$ máme:

$$d(y,c) \le d(y,x) + d(x,c) < \tilde{R} + d(x,c) = R$$

$\Rightarrow\ y \in B(c,R)$.

Tedy $B(x,\tilde{R}) \subseteq B(c,R)$ ⊠

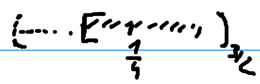
PŘÍKLADY:

1) OT. INTERVAL JE OT. MNOŽINA (v $\mathbb{R}$)

$(a,b) = B\left(a + \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ je ot. $(a,b \in \mathbb{R})$

podobně pro (a,∞) a $(-\infty,b)$ ...

2) $(M,d) = ([0,1], |\cdot|)$ pak $[0,\frac{3}{4})$ je ot. v M

$[0, 3/4) = B(1/4, 1/2)$ 

3) $\{0,1\}$ – prostor M, pak $\forall x \in M:\ \{x\}$ je ot. množina

$\{x\} = B(x, 1/2)$

4) Koule neurčí svůj střed, ani poloměr.

Př.: $M = \{0,1\} \cup [2,\infty)$, pak $B(0,3) = B(1,2)$

$$B(0,3) = \{0,1\} \cup [2,3) = B(1,2)$$

Def: Ať (M,d) je m.p., $A \subseteq M$.

(i) uzávěr $A \overset{def}{\equiv} A \cup \partial A$, značíme jej $\overline{A}$

(ii) A uzavřená $\overset{def}{\equiv} \partial A \subseteq A$

obr.: 

Lemma 4: Ať (M,d) je m.p., $A \subseteq M$. Pak

(i) $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)$ posloupnost v A : $x_n \to x$

(ii) TFAE (PNTJE) (a) A je uz.

(b) $A = \overline{A}$

(c) $\forall (x_n)$ posloupnost v A: $x_n \to x \implies x \in A$
$\forall x \in M$

Dk: (i) „$\Rightarrow$" Ať $x \in \overline{A}$. Pokud $x \in A$, položme $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$ ✓ a je to.

Pokud $x \notin A$, pak $\forall n \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$.

Pak $x_n \to x$ [protože $0 \le d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$ ⌟

„$\Leftarrow$" Ať (x_n) je posl. v A, $x_n \to x$.

Pokud $x \in A$, jsme hotovi.

Pokud $x \notin A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x,\varepsilon) \cap A$

tedy $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ & $B(x,\varepsilon) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$

tedy $x \in \overline{A}$.

(ii) $\overbrace{A \text{ je uz.}}^{=(a)} \overset{def}{\iff} \partial A \subseteq A \iff \overbrace{A = A \cup \partial A = \overline{A}}^{=(b)}$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \underbrace{\forall (x_n) \text{ v } A : x_n \to x \Rightarrow x \in A \quad \forall x \in M}_{=(c)} \overset{(i)}{\Longrightarrow} \partial A \subseteq A$, tj. (a)

$\forall x \in \partial A \overset{(i)}{\Rightarrow} \exists (x_n) \text{ v } A,\ x_n \to x \overset{(c)}{\Longrightarrow} x \in A$ ⌟

⊠

Př: 1) $[0,1]$ je UZ., není OT. 4) $(0,1)$ je OT., není UZ.

2) $[0,1)$ není UZ. ani OT. 5) $(-\infty, 1] \subseteq \mathbb{R}$ je UZ.

3) $\mathbb{R}$ je UZ. i OT.

<u>Věta 5 (ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI OT. MNOŽIN)</u>: Ať (M,d) je M.P. Pak

(i) M a $\emptyset$ jsou OT.

(ii) $(M_i)_{i\in I}$ otevřené v M $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} M_i$ je otevřená

(iii) $(M_i)_{i=1}^{n}$ —"— $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ je otevřená

$n \in \mathbb{N}$

Dk: (i) • $x \in M \Rightarrow B(x,1) \subseteq M$, tedy M je OT.

• $\emptyset$ je triviálně ot.

(ii) • $x \in \bigcup_{i\in I} M_i$, pak $\exists i_0 : x \in M_{i_0}$

Protože M_{i_0} ot., existuje $R>0$: $B(x,R) \subseteq M_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$

Tedy $\bigcup_{i\in I} M_i$ je ot.

(iii) • $x \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, pak $\forall i = 1,\dots,n\ \exists R_i > 0 : B(x,R_i) \subseteq M_i$

Položme $R := \min(R_i ; i=1,\dots,n) > 0$, pak

$$B(x,R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B(x,R_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} M_i$$

Tedy $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ je ot. ⊠

Př: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1]$ není ot., tedy (iii) ve větě 5 neplatí pro nekonečné průniky

↳ ot.: $-\frac{1}{2}$, 0, 1, $1+\frac{1}{n}$

Věta 6 (VZTAH OT. a UZ. MNOŽIN): Ať (M,d) je m.p., $A \subseteq M$.

Pak A je OT. $\iff$ $M \setminus A$ je UZ.

Dk:

„$\Rightarrow$" Zvol (x_n) posloupnost v $M \setminus A$, $x_n \to x \in M$

CHCI: $x \notin A$.

SPORÉM: Kdyby $x \in A$, pak $\exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \subseteq A$

$\Rightarrow \exists n: x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$ $\lightning$ spor s tím, že $x_n \notin A$

„$\Leftarrow$" Zvol $x \in A$. Protože $M \setminus A$ je uz. (tedy $\partial(M \setminus A) \subseteq M \setminus A$),

$x \notin \partial(M \setminus A)$, tedy

$\exists \varepsilon > 0$: $\underbrace{B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset}_{\text{To se nestane, protože } x \in B(x,\varepsilon) \cap A}$ nebo $B(x, \varepsilon) \cap (M \setminus A) = \emptyset$

Tedy, $\exists \varepsilon > 0$: $\underbrace{B(x, \varepsilon) \cap (M \setminus A) = \emptyset}_{\iff B(x,\varepsilon) \subseteq A}$

Tedy, $\exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Tedy A je ot. $\boxtimes$

Věta 7 (ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI UZ. MNOŽIN): Ať (M,d) je m.p., $A \subseteq M$.

Pak (i) M a $\emptyset$ jsou UZ.

(ii) $(M_i)_{i \in I}$ jsou UZ. $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} M_i$ je UZ.

(iii) $(M_i)_{i=1}^{n}$ jsou UZ. $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ je UZ.

Dk: PLYNE z věty 6 + de-Morganových pravidla $\boxtimes$

__Věta 8__: Ať (M,d) je m.p., $A \subseteq M$. Pak

(i) $\operatorname{Int}(A) = \bigcup \{ G \subseteq A;\ G \text{ je ot.} \}$

(ii) $\overline{A} = \bigcap \{ F \supseteq A;\ F \text{ uz.} \}$

__Dk__:

(i) „$\subseteq$" lehké: $x \in \operatorname{Int}(A) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \subseteq A$,
stačí položit $G := B(x,\varepsilon)$

„$\supseteq$" Ať $G \subseteq A$ ot., pak $G = \operatorname{Int}(G) \subseteq \operatorname{Int}(A)$

(ii) „$\subseteq$" $x \in \overline{A}$, pak $\exists (x_n)$ v A: $x_n \to x$.

Zvol $F \supseteq A$ uz., pak $\underset{A \subseteq F}{\underset{\cap}{x_n}} \to x$, tedy $x \in F$

„$\supseteq$" lehké, položím $F := \overline{A} \supseteq A$, („tedy $\overline{A}$ je jedna z množin, které průnikám")

$\boxtimes$

__CVIČENÍ__:

- PŘÍKLAD 16 + VĚTA 17 Z MATERIÁLU NA WEBU

__DALŠÍ CVIČENÍ__:

- $(V, \|\cdot\|)$ je NLP, pak $\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1)$. DOKAŽTE.

  __POZOR!__: OBECNĚ ROVNOST $\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1)$ NEPLATÍ.
  ZKUSTE NAJÍT PROTIPŘÍKLAD (__HINT__: $\{0,1\}$ – PROSTOR)

- ZKUSTE NAJÍT METRICKÝ PROSTOR, ŽE
  $$\overline{B(0,1)} = B(0,1)$$

- M <u>ULTRAMETRICKÝ</u>, POKUD

$$\forall x,y,z \in M: \quad d(x,y) \le \max\big(d(x,z), d(z,y)\big)$$

DOKAŽTE, ŽE PRO M ULTRAMETRICKÝ PLATÍ:

$$\forall x,y \in M \ \forall R>0: \quad y \in B(x,R) \implies \overline{B}(y,R) \subseteq \overline{B}(x,R)$$

<u>Př</u>: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ s metrikou

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \dots \ x = y \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & \dots \ \text{kde } n = \min\big(i;\ x(i) \neq y(i)\big) \end{cases}$$

<u>Cvič</u>: JE ULTRAMETRICKÝ

<u>obr.</u>