METRICKÉ PROSTORY

PLÁN: 3 PŘEDNÁŠKY CÚTH, PAK 3–4 RMOUTIL,
PAK 3–4 VEJNAR, MOŽNÁ NĚCO NA KONEC CÚTH

//

I. MOTIVACE

VÍME: $(x_n) \subset \mathbb{R}$; pak $x_n \to x \overset{\text{def}}{\equiv} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$
$x \in \mathbb{R}$

$$\iff \underbrace{|x_n - x|}_{\text{VZDÁLENOST}} \to 0$$

ZOBECNĚNÍ KONVERGENCE: POMOCÍ POJMU „METRICKÝ PROSTOR"
„TOPOLOGICKÝ PROSTOR"

Def: M množina, $d : M \times M \to [0, \infty)$ je **metrika**, pokud $\forall x, y, z \in M$ platí:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(y,x) = d(x,y)$ (SYMETRIE)

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Δ-NEROVNOST)

Dvojice (M,d) se nazývá **metrický prostor**.

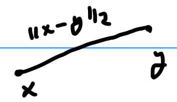
PŘÍKLADY

1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ [tedy $d(x,y) := |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$]
je M.P.

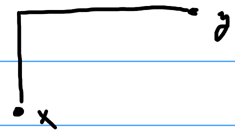
2) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ [tedy $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|x - y\|_2$
$= \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$; $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$]

je M.P. (DK: BUDE POZDĚJI ...)

OBR:



3) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$ ... kde $\|\cdot\|_1(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$

Obr.: 

(TAXI – VZDÁLENOST; SOUČTOVÁ VZDÁLENOST; NEW-YORSKÁ METRIKA)

je M.P. (bude později něco obecnějšího)

POUŽITÍ: SAMOOPRAVNÉ KÓDY

⌈ d-tice 0 a 1 se dá vnímat jako vektor v $\mathbb{R}^d$

01001 $\rightsquigarrow$ $(0,1,0,0,1)$

Pak $\|x-y\|_1$ = # ROZDÍLNÝCH BITŮ

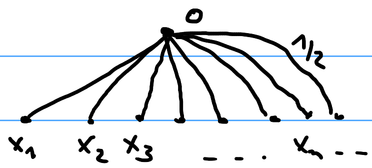
Cíl: INFO (TŘEBA PÍSMENO) $\rightsquigarrow$ BIT TAK, aby

$A \neq B \implies \|A-B\|_1$ VELIKÉ ⌋

4) DISKRÉTNÍ PROSTOR (PŘESNĚJI = $\{0,1\}$ – METRICKÝ PROSTOR):

M množina, $d_{\{0,1\}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \dots\ x=y \\ 1 & \dots\ x\neq y \end{cases}$

Lehké cvičení: $(M, d_{\{0,1\}})$ je M.P.

Obr.: 

5) NEJKRATŠÍ CESTA:

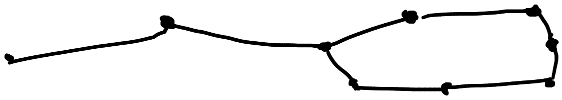
$G = (V, E)$ souvislý graf

V ↗ VRCHOLY, E ↑ HRANY

$d(v,\tilde{v}) := \inf\{n;\ \exists$ cesta $(x_0,\dots,x_n)$ z v do $\tilde{v}\}$

tj.: $x_0 = v$, $x_n = \tilde{v}$,

$\{x_i, x_{i+1}\} \in E$, $i \leq n-1$ ⌋

Obr.: 

(JÍZDNÍ ŘÁDY, POČÍTAČOVÉ SÍTĚ ---)

CVIČENÍ: JE M. P.

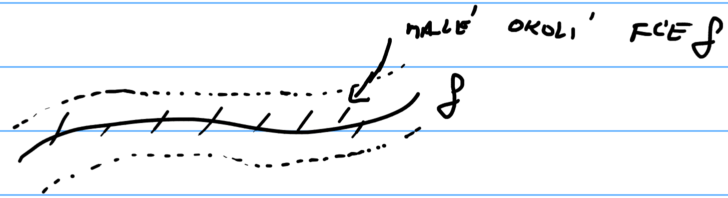
6) GEODESIKA: SFÉRA V $\mathbb{R}^3$;
VZDÁLENOST = „DÉLKA NEJKRATŠÍ KŘIVKY VE SFÉŘE SPOJUJÍCÍ 2 BODY"

7) $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, kde

$$\mathcal{C}[0,1] = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ SPOJITÉ} \}$$

$$\|f-g\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

OBR.:



CVIČENÍ: $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ je M. P.

8) OBECNÝ PŘÍKLAD → METRIKA GENEROVANÁ NORMOU

Def.: Ať V je vektorový prostor nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,

pak $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ je norma, pokud

$\forall x,y \in V$: (i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}$: $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$

(iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Δ-NEROVNOST)

Dvojice $(V, \|\cdot\|)$ se nazývá NORMOVANÝ LINEÁRNÍ PROSTOR (NLP)

PŘ.: AD 1), 2), 3), 7) VÝŠE

1) ↓ LEHKÉ

2), 3) BUDE POZDĚJI

7) ↘ LEHKÉ

FAKT 1: Ať $(V, \|\cdot\|)$ je NLP, polož $d(x,y) := \|x-y\|$, $x,y \in V$.

Pak (V,d) je M.P.

Dk.: lehce z def.:

- $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$
- $d(x,y) = \|x-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$

$\tilde{x} = x-z$
$\tilde{y} = z-y$

$\boxtimes$

def.: Ať $p \in [1,\infty]$. Polož
$$\|\vec{x}\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p} & \dots p \neq \infty, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \\ \max_{1 \le i \le d} |x_i| & \dots p = \infty, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

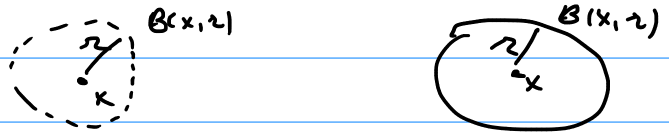
Věta 2: $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ je N.L.P. pro $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$

def. (OT. A UZ. KOULE): Ať (M,d) je M.P., $x \in M$, $r > 0$.

Pak $B(x,r) := \{y \in M;\ d(x,y) < r\}$ je OT. KOULE O STŘEDU x A POLOMĚRU r

$\overline{B}(x,r) := \{$ —— " —— $\le r\}$ je UZ. KOULE O STŘEDU x A POLOMĚRU r.

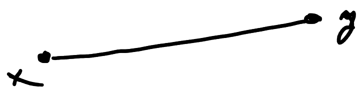
obr.:



DŮKAZ VĚTY 2:

1. krok: $\{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\|_p \le 1\} =: B$ JE KONVEXNÍ MNOŽINA

(TJ. $\forall \lambda \in (0,1)\ \forall x,y \in B: \ \lambda x + (1-\lambda) y \in B$)



$\ulcorner$ Zvol $\lambda \in (0,1)$; $x, y \in B$

$p = \infty$: Pak $\forall i = 1, \dots, d$: $|\lambda x_i + (1-\lambda) y_i| \le \lambda |x_i| + (1-\lambda) |y_i|$

$$\le \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \|\lambda x + (1-\lambda) y\|_\infty \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in B$$

$p < \infty$:

Pak $\forall i = 1, \dots, d$: $|\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^p \le \lambda |x_i|^p + (1-\lambda) |y_i|^p$

$\ulcorner$ PROTOŽE $\lambda \mapsto |\lambda|^p$ JE KONVEXNÍ FCE $\lrcorner$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} |\lambda x_i + (1-\lambda) y_i|^p \le \lambda \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p + (1-\lambda) \sum |y_i|^p$$

$$\le \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \|\lambda x + (1-\lambda) y\|_p \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in B \quad \lrcorner$$

$\boxtimes$ KONEC 1. KROKU

2. krok:

POKUD $\|\cdot\|$ SPLŇUJE (i) + (ii) a $\underset{B=}{\{x;\ \|x\| \le 1\}}$ je konvexní

$\Rightarrow \|\cdot\|$ je norma

$\ulcorner$ Zvol $x, y \in V$; POLOŽ $\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|} \in B$, $\tilde{y} := \frac{y}{\|y\|} \in B$

BÚNO $x \neq 0$
$y \neq 0$

Tedy

$$\frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} = \underbrace{\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}}_{=:\lambda} \tilde{x} + \underbrace{\frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}}_{= 1-\lambda} \tilde{y} \in B$$

KONVEXITA B

$$\Rightarrow \left\| \frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} \right\| \le 1 \Rightarrow \frac{\|x+y\|}{\|x\| + \|y\|} \le 1 \quad \lrcorner$$

3. krok: $\|\cdot\|_p$ ZŘEJMĚ SPLNÍ (i) + (ii)

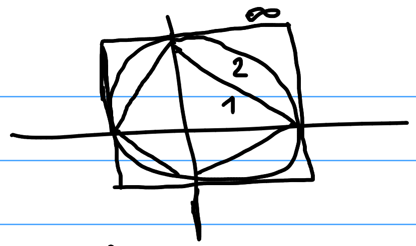
a B JE KONVEXNÍ DLE 1. HO KROKU

$\Rightarrow \|\cdot\|_p$ JE NORMA DLE 2. HO KROKU

$\boxtimes$ konec důkazu věty 2

OBR: KOULE v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ PRO $p \in \{1, 2, \infty\}$

$B(0,1)$



ZNAČENÍ: $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \overset{def}{\equiv} \ell_p^d$

KONVERGENCE:

Def: Ať (M, d) je M.P., $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ POSLOUPNOST v M, $x \in M$.

Pak (x_n) KONVERGUJE k x pokud $d(x_n, x) \to 0$.

Píšeme $x_n \to x$ nebo také $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

ZÁKLADNÍ LEHKÁ CVIČENÍ:

a) $x_n \to x$, $x_n \to y \implies x = y$

[HINT: POUŽIJE SE Δ – NEROVNOST, TJ.

Zvol $\varepsilon > 0$ ... $\exists n_0 \; \forall n \geq n_0$: $d(x_n, x) < \varepsilon$

$\exists n_1 \; \forall n \geq n_1$: $d(x_n, y) < \varepsilon$

$\implies \forall n \geq \max(n_0, n_1)$:

$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\varepsilon$

Celkem: $\forall \varepsilon > 0$: $d(x, y) < 2\varepsilon$, tedy $d(x, y) = 0$]

b) $x_n \to x$, pak pro každou podposl. (x_{n_k}) platí, že

$x_{n_k} \to x$

[lehké]

STŘEDNĚ TĚŽKÁ CVIČENÍ:

c) (x_n) posl. v $\mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty]$.

Pak $x_n \to x$ v ℓ_p^d $\iff \forall i = 1, \dots, d$: $x_n(i) \to x(i)$

⌈DCV … ZKUSIT SI DOKÁZAT … ⌋

Př.: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1\right) \longrightarrow (0,1)$ v $\ell_p^2 = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

d) UVAŽUJ NA $\mathbb{R}^d$ $\{0,1\}$-METRIKU.

Pak $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \not\to (0,0)$

⌈Protože $d_{\{0,1\}}\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (0,0)\right) = 1 \not\to 0$ ⌋

DCV.:

DOKAŽTE, ŽE $\{0,1\}$-M.P. PLATÍ:

$x_n \to x \Rightarrow \exists m \; \forall n \geq m: x_n = x$

TROCHU TĚŽŠÍ CVIČENÍ:

e) DOKAŽTE, ŽE $\forall p,q \in [1,\infty]$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$p \geq q \Rightarrow \|x\|_p \leq \|x\|_q$

f) JAKO DŮSLEDEK UKAŽTE, ŽE $\forall p,q \in [1,\infty]$ $\forall d \in \mathbb{N}$

$\exists C > 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{C}\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C\|x\|_p$