Metrické prostory

motivace

$\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, které interpretujeme jako $\mathbb{R}^2$.

- pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $|a - b|$ jejich vzdálenost
- $\lim_n a_n = a \Leftrightarrow \lim_n |a_n - a| = 0$. Pro $\mathbb{C}$ uvažujeme zvlášť konvergenci reálné a imaginární části, přičemž $|\Re(a_n - a)| \leqslant |a_n - a|$

Příklady. zobecnění: místo $\mathbb{R}$ můžeme uvažovat pouze $[0, 1]$, rozšířit na $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{Z}$, sféra $\mathbb{S}^1$ (kružnice), kde máme dvě volby měření vzdálenosti, buďto zachovat tu z $\mathbb{R}^2$, nebo vzdálenost po oblouku, $\mathbb{S}^2$, grafy (ohodnocené...). V $\mathbb{R}^n$ užíváme Pythagorovy věty. Vzdálenosti spojuje, že jsou vždy nezáporné. ▲

1 Abstraktní metrický prostor

Vzdálenost bude stále v $[0, \infty)$. Nemusí nutně jít o vektorový prostor, proto nemůžeme používat značení $|x - y|$.

Definice 1. Mějme množinu M. Funkce $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ se nazývá metrika, platí-li pro všechna $x, y, z \in M$

(1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(axiom koincidence)*

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(symetrie)*

(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Dvojici (M, ρ) nazýváme **metrický prostor**.

Příklady.
- $x, y \in \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ je metrika;
- $\rho_2(x, y) = \rho_e(x, y) = \left|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right|^{\frac{1}{2}}$ na $\mathbb{R}^n$ je eukleidovská metrika; první dvě vlastnosti jsou vidět okamžitě, trojúhelníková nerovnost se ukáže dále;
- $\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$, ukážeme (3). Buďte $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\rho_\infty(x, z) = \max |x_i - z_i| \leqslant \max(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \leqslant \max |x_i - y_i| + \max |y_i - z_i| = \rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z)$;
- $\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, tzv. manhattanská / NYC / taxíková metrika;

▲

Definice 2 (otevřená a uzavřená koule)**.** Buď (M, ρ) metrický prostor, $c \in M, \delta > 0$. Definujeme **otevřenou kouli** se středem c a poloměrem δ jako $B_\rho(c, \delta) = \{x \in M; \rho(x, c) < \delta\}$. Dále **uzavřenou kouli** se středem c a poloměrem δ jako $\overline{B}_\rho(c, \delta) = \{x \in M; \rho(x, c) \leqslant \delta\}$.

Poznámka. Metriky z příkladů zúžené na osu x z ní vytnou stejný interval.

Jiná možnost: M je křivka v $\mathbb{R}^2$, vzdálenost od bodu c můžeme měřit „vzdušnou čarou“, či podél křivky.

Definice 3 (Normovaný lineární prostor)**.** Buď V vektorový prostor (nad $\mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$). Norma na V je funkce $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ splňující pro všechna $x, y \in V$ a skaláry c

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ *(homogenita)*,

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Fakt 4. *Pokud $\|\cdot\|$ je norma na V, pak $d(x,y) = \|x-y\|$ je metrika, která navíc splňuje*

(4) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ pro všechna $z \in V$ (translační invariance).

Příklad 5 (ℓ_p-norma na $\mathbb{R}^n$)**.** $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ pro $p \geqslant 1$. ▲

Tvrzení 6. *Buď $p \geqslant 1$ libovolné a ρ_p zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované $\rho_p(x,y) = \|x-y\|_p$. Pak $\overline{B}_{\rho_p}(0,1)$ je konvexní.*

Důkaz. Nechť $x, y \in \overline{B}_{\rho_p}(0,1) = B$ a $\alpha, \beta \in (0,1), \alpha + \beta = 1$. Chceme ukázat, že $\alpha x + \beta y \in B$. Máme $\|x\|_p \leqslant 1, \|y\|_p \leqslant 1$, chceme $\|\alpha x + \beta y\|_p \leqslant 1$. Funkce $t \mapsto |t|^p$ je konvexní, protože $p \geqslant 1$. Tedy $\forall i \in \{1, \dots, n\} : |\alpha x_i + \beta y_i|^p \leqslant \alpha |x_i|^p + \beta |y_i|^p$. Tedy $\sum_{i=1}^n |\alpha x_i + \beta y_i|^p \leqslant \alpha \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \beta \sum_{i=1}^n |y_i|^p$, a tak $\|\alpha x + \beta y\|_p = (\sum_{i=1}^n |\alpha x_i + \beta y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\alpha + \beta)^{\frac{1}{p}} = 1$. □

Věta 7 (trojúhelníková nerovnost pro ℓ_p normy)**.** *Buď $p \geqslant 1$. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti buď $x \neq 0, y \neq 0$ (triviální). Položme $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}, \hat{y} = \frac{y}{\|y\|}, \lambda = \frac{1}{\|x\|+\|y\|}, \alpha = \lambda \|x\|, \beta = \lambda \|y\|$ (platí $\alpha + \beta = 1, \|\hat{x}\| = 1 = \|\hat{y}\|, \alpha, \beta, \lambda > 0$). Platí $\lambda(x+y) = \frac{x}{\|x\|+\|y\|} + \frac{y}{\|x\|+\|y\|} = \frac{\|x\|\hat{x}}{\|x\|+\|y\|} + \frac{\|y\|\hat{y}}{\|x\|+\|y\|} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$. Je $\|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant 1$, tedy $\|x+y\| = (\|x\| + \|y\|)\,\|\lambda(x+y)\| = (\|x\| + \|y\|)\,\|\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. □

Důsledek 8. *$\forall p \geqslant 1 : \rho_p$ je metrika na $\mathbb{R}^n$.*

Trojúhelníková nerovnost pro ℓ_p normy na $\mathbb{R}^n$ se nazývá Minkovského nerovnost. Další příklady metrik:

Příklady.

- Diskrétní prostor. Buď M libovolná množina; definujeme $d : M \times M \to [0, \infty), x, y \in M$ předpisem

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = y, \\ 1 & \text{pokud } x \neq y. \end{cases}$$

  Platí, že d je metrika a je snadno vidět, že $B_d(x,1) = \{x\}, \overline{B}_d(x,1) = M$.

- Hammingova vzdálenost. Nechť H je množina „znaků“ (pro jednoduchost volme $H = \{0,1\}$), $m \in \mathbb{N}$. Definujeme $\rho_H : H^m \times H^m \to [0, \infty)$ (či $\mathbb{N}_0$). Pro řetězce znaků $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in H^m$ buď $\rho_H(x,y) = \#\{j \in \{0, \dots, m\} : x_j \neq y_j\}$ (kde $\#A$ značí počet prvků konečné množiny A), respektive pro $H = \{0,1\}$ je $\rho_H = \rho_1$. Zobrazení ρ_H je metrika.

  Například $H = \{0,1\}, m = 3$, pak $|H^3| = 8$ a je

$$\overline{B}_{\rho_H}((0,0,0),1) = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

$$\overline{B}_{\rho_H}((1,1,1),1) = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

- Slunečnice na $\mathbb{R}^2$ (metrika francouzských železnic). Pro body $x, y \in \mathbb{R}^2$ buď

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{pokud } x, y \text{ a } 0 \text{ jsou kolineární,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- $M = \mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ je spojitá}\}$. Pro $f \in \mathcal{C}([0,1])$ buď $\|f\|_{\sup} = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ a potom $\rho_{\sup}(f,g) = \|f-g\|_{\sup} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

▲

Definice 9. Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Řekneme, že bod $x \in A$ je **vnitřní bod** A, pokud $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Řekneme, že A je **otevřená**, jestliže každý její bod je vnitřní. Dále označme $A^O = \{x \in A : x \text{ je vnitřní bod } A\}$ vnitřek množiny A.

Lemma 10. *(1) A je otevřená, právě když $A = A^O$.*

(2) Otevřená koule je otevřená množina.

Důkaz. (1) Triviální důsledek definice.

(2) Uvažujme $B\left(c,\delta\right) \ni x$ libovolně. Podle definice je $\rho(x,c) < \delta$ tedy $\varepsilon := \delta - \rho(x,c) > 0$. Dále nechť $y \in B(x,\varepsilon)$ tedy $\rho\left(x,y\right) < \varepsilon$, pak $\rho(c,y) \leqslant \rho(c,x) + \rho(x,y) < \rho(c,x) + \varepsilon = \delta$. Tedy $y \in B(c,\delta)$, tudíž také $B(x,\varepsilon) \subseteq B(c,\delta)$.

□

Příklady. (1) $(\mathbb{R}, \rho_e)$.

- Otevřená koule je otevřený interval, tedy $(c-\delta, c+\delta) = B(c,\delta)$, což je otevřená množina.
- Intervaly $(-\infty, c), (c, \infty), (-\infty, \infty)$ jsou také otevřené množiny.

(2) $([0,1], \rho_e)$. (míněno $\rho_e|_{[0,1]^2}$)

- $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) \cap [0,1] = [0, \frac{3}{4})$ je koule, a tedy otevřená množina.
- Podobně $[0,1]$ je otevřená množina a intervaly tvaru $(a,b) \subseteq [0,1]$ jsou otevřené množiny.

(3) Diskrétní prostor (M,d). Buď $c \in M$, pak $B(c, \frac{1}{2}) = \{c\}$ (singleton), což je otevřená množina. Ve skutečnosti každá podmnožina $A \subseteq M$ je otevřená.

(4) „Nesouvislé koule“ v $M = \mathbb{R} \setminus (-1,1)$. $B(-2,4) = (-6,2) \cap M = (-6,-1] \cup [1,2)$. Dále $B(0,2)$ není definovaná, neboť koule v M nemůže mít střed mimo M.

(5) $M = \{0,1\} \cup [2,\infty)$. Je $B(0,3) = \{0,1\} \cup [2,3) = B(1,2)$. Tedy koule obecně neurčuje jednoznačně svůj střed ani poloměr.

▲

Věta 11 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Buď (M,ρ) metrický prostor. Pak*

(1) M a $\emptyset$ jsou otevřené v M,

(2) jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ je otevřená,

(3) buď $A_\alpha, \alpha \in I$ indexovaný soubor otevřených množin. Pak $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ je otevřená.

Důkaz. (1) $\forall x \in M\ \exists \varepsilon > 0 : B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq M$ z definice koule pro libovolné ε. Podmínka $\forall x \in \emptyset\ \exists \varepsilon : B(x,\varepsilon) \subseteq \emptyset$ nic nepožaduje, a tak je triviálně splněna.

(2) Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Z otevřenosti množin A_i je $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \exists \varepsilon_i > 0 : B(x,\varepsilon_i) \subseteq A_i$. Položme $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \varepsilon_i > 0$. Pak $B(x,\varepsilon) \subseteq A_i$ pro všechna i, tedy $B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

(3) Buď $x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ libovolné. Pak $\exists \alpha \in I : x \in A_\alpha$, a tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B\left(x,\varepsilon\right) \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta\in I} A_\beta$.

□

Příklad. Bod (2) předchozí věty obecně neplatí pro nekonečné průniky (nelze vybrat minimum z nekonečné množiny). V $\mathbb{R}^n$ je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(0, \frac{1}{n}) = \{0\}$ a ta není otevřená. Dále v $\mathbb{R}$ je $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) = [0,1]$, což není otevřená množina. ▲

Definice 12. Buď (M,ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$.

- $A^C = M \setminus A$ značíme **komplement** množiny A;
- $x \in M$ je **hraniční bod** A, jestliže $\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap A^C \neq \emptyset$;
- **hranice** množiny A nechť je $H(A) = \{x \in M : x \text{ je hraniční bod } A\}$ (někdy značení ∂A);
- **uzávěr** množiny A je $\overline{A} := A \cup H(A)$ (někdy $\mathcal{C}l(A)$);
- pokud $H(A) \subseteq A$, říkáme, že A je **uzavřená** množina.

Příklady. (1) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená a není otevřená,

(2) $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ není otevřená ani uzavřená,

(3) $\mathbb{R}$ je uzavřená i otevřená, neboť $H(\mathbb{R}) = \emptyset \subseteq \mathbb{R}$,

(4) $\{1\}$ je uzavřená a není otevřená,

(5) $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ není uzavřená, je otevřená.

Poučení: otevřené a uzavřené množiny nejsou jako dveře. ▲

Definice 13. Nechť (M,ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků M (tj. zobrazení $\mathbb{N} \to M$). Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Jde o zobecnění limity posloupnosti z pojmu limity v $\mathbb{R}$.

Věta 14 (charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(1) A je uzavřená,

(2) A^C je otevřená,

(3) $\overline{A} = A$,

(4) Pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků A je $\lim_n x_n \in A$ (tj. z množiny A se nedá „vykonvergovat“).

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2) Nechť A je uzavřená. Nechť $x \in A^C$. Víme, že $H(A) \subseteq A$ tj. $H(A) \cap A^C = \emptyset$, a tedy $x \notin H(A) \Leftrightarrow \neg(x \text{ je hraniční}) \Leftrightarrow \neg(\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap A^C \neq \emptyset) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset \vee B(x,\varepsilon) \cap A^C = \emptyset$. Ale $x \in B(x,\varepsilon) \cap A^C$, tedy musí být $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ pro nějaké ε, odkud $B(x,\varepsilon) \subseteq A^C$.

(2) $\Rightarrow$ (4) Nechť A^C je otevřená a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků A; označme $x = \lim x_n$. Sporem: pokud by bylo $x \in A^C$, protože A^C je otevřená, existovalo by $\varepsilon > 0$, že $B(x,\varepsilon) \subseteq A^C$. Z definice limity $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : \rho(x, x_n) < \varepsilon$, tedy $x_n \in B(x,\varepsilon) \subseteq A^C$. Tedy $x_{n_0} \in A^C$, což je spor. Proto $x \in A$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Chceme $H(A) \subseteq A$. Zvolme $x \in H(A)$ libovolně. Tedy $\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Tedy $\forall n \in \mathbb{N} : B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Rekurzí definujme posloupnost $\{x_n\}$ prvků A splňující $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Pak $0 \leqslant \rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$, tedy $\lim \rho(x_n, x) = 0$, a tedy $\lim x_n = x$. Dle (4) tak platí $x \in A$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) je triviální.

□

Příklad.

- Interval $[a,b]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$, zatímco (a,b) není. Má souvislost s uspořádáním a limitou; existuje-li $\lim x_n$, pak $a \leqslant x_n \leqslant b \Rightarrow a \leqslant \lim x_n \leqslant b$, ale $a < x_n < b \not\Rightarrow a < \lim x_n < b$.
- Množina $(-\infty, 0]$ je uzavřená.
- **Cantorovo diskontinuum**: Konstrukci začneme s intervalem $[0,1]$ (označme C_0); v prvním kroku odebereme otevřenou prostřední třetinu, tj. interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, čímž dostaneme množinu $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Máme-li už pro $n \geqslant 1$ definovánu množinu C_n (která je sjednocením konečně mnoha uzavřených omezených intervalů), dostaneme množinu C_{n+1} tak, že odebereme otevřenou prostřední třetinu z každé souvislé části C_n. Nakonec zadefinujeme $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Je vidět, že C je neprázdná, např. $0 \in C$. Z Cantorova principu vnořených intervalů vidíme, že výběrem na každé hladině, zda pokračovat vlevo či vpravo, jednoznačně dokonvergujeme právě do jednoho bodu. Tím máme bijekci posloupností prvků $\{0,1\}$ s množinou C, tedy C je dokonce nespočetná. Body C z každého intervalu na libovolné úrovni C_n jsou obojetná množina (otevřená i uzavřená v C). Explicitně můžeme psát $C = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right)$, z čehož je také vidět, že C jsou právě ty body $[0,1]$, které ve svém nekonečném trojkovém rozvoji neobsahují číslici 1, pouze 0 a 2.

▲

Věta 15. *Buď (M,ρ) metrický, pak platí*

(1) $M, \emptyset$ jsou uzavřené podmnožiny v M,

(2) jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ uzavřené, pak $\bigcup_{i=1}^n A_i$ je uzavřená,

(3) je-li $A_\alpha, \alpha \in I$ soubor uzavřených množin, pak $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ je uzavřená.

Důkaz. (1) Je $H(\emptyset) = \emptyset$, tedy $\emptyset$ se rovná svému uzávěru, dále $M^C = M \setminus M = \emptyset$, tedy $M = \overline{M}$ a je uzavřená.

(2) Z de-Morganových vzorců. Je $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (M \setminus A_i)$, což jakožto konečný průnik otevřených množin je otevřená množina, a tedy její komplement je uzavřená.

(3) Podobně $M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I}(M \setminus A_\alpha)$ je sjednocení otevřených množin, tedy oteřená a komplement je uzavřená.

□

Příklad 16. Buď (M,ρ) metrický, $A \subseteq M$. Víme: $\overline{A} = A \cup H(A)$; A je uzavřená, právě když $A = \overline{A}$; A je otevřená, právě když $A = A^O$. Značíme $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$ vzdálenost bodu od množiny. Platí následující rovnosti:

(1) $A^O = A \setminus H(A)$;

(2) $H(A) = \overline{A} \setminus A^O$;

(3) $H(A) = H(A^C)$;

(4) $H(A) = \overline{A} \cap \overline{A^C}$;

(5) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(6) $(A^O)^O = A^O$;

(7) $\overline{A} = M \setminus (M \setminus A)^O = ((A^C)^O)^C$;

(8) $A^O = M \setminus \overline{M \setminus A} = (\overline{A^C})^C$;

(9) $\overline{A} = \{x \in M : \exists$ posloupnost $\{x_n\} \subseteq A : \lim_n x_n = x\}$;

(10) $\overline{A} = \{x \in M : \forall \varepsilon; > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$;

(11) $\overline{A} = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

▲

Věta 17 (vlastnosti uzávěru)**.** *Buď (M,ρ) metrický, $A, B \subseteq M$. Pak*

(1) $\overline{A}$ je uzavřená, A^O je otevřená,

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \wedge A^O \subseteq B^O$,

(3) $\overline{A} = \bigcap\{F : F \subseteq M \wedge F$ uzavřená $\wedge A \subseteq F\}$, $A^O = \bigcup\{G : G \subseteq M \wedge G$ otevřená $\wedge G \subseteq A\}$,

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $(A \cap B)^O = A^O \cap B^O$, $(A \cup B)^O \supseteq A^O \cup B^O$.

Důkaz. (1) A^O je otevřená: Triviální, pokud $A = \emptyset$. Jinak buď $x \in A^O$, chceme $x \in (A^O)^O$, tj. chceme $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq A^O$. Podle definice existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x,\varepsilon) \subseteq A$, ale $B(x,\varepsilon)$ je otevřená, tedy každý její bod je vnitřní v $B(x,\varepsilon)$, tedy i v A, pročež $B(x,\varepsilon) \subseteq A^O$. Dále $\overline{A} = M \setminus (M \setminus A)^O$ je doplněk otevřené množiny, tj. uzavřená.

(2) Nechť $A \subseteq B \subseteq M$, pak $A^O \subseteq B^O$ je triviální, dále $\overline{A} = ((A^C)^O)^C \subseteq ((B^C)^O)^C = \overline{B}$ plyne z $B^C \subseteq A^C$.

(3) Označme $\mathcal{F} := \{F : F \subseteq M \wedge F$ uzavřená $\wedge F \supseteq A\}$. Ukažme postupně:

- $\overline{A} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. Nechť F je uzavřená, $A \subseteq F$. Pak $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$. Tedy $F \supseteq \overline{A}$ a proto $\overline{A} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$;
- $\overline{A} \supseteq \bigcap \mathcal{F}$. $\overline{A}$ je uzavřená, dále $\overline{A} \supseteq A$, a tedy $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

Pro druhou část označme $\mathcal{G} = \{G : G \subseteq M \wedge G$ otevřená $\wedge G \subseteq A\}$. Potom pokud $x \in A^O$, tedy x je vnitřní bod A, existuje $\varepsilon > 0$, že $B = B(x, \varepsilon) \subseteq A$, to je otevřená podmnožina A, tedy $B \in \mathcal{G}$. Obdobně, je-li $x \in G, G \in \mathcal{G}$, existuje $\varepsilon > 0$, že $B(x, \varepsilon) \subseteq G \subseteq A$.

(4) $A \cup B \supseteq A, B$, tudíž $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A}, \overline{B}$, a tedy $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Dále $\overline{A} \cup \overline{B}$ je uzavřená, $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$. Ostatní obdobně.

□

Definice 18 (spojitost)**.** Buďte (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že

- f je **spojitá v bodě** a, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X : \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$;
- f je **spojitá** (na X), pokud $\forall a \in X : f$ je spojitá v a;
- f je **lipschitzovská** (lipschitzovsky spojitá) na X, pokud $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in X : \sigma(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y)$.

Fakt 19. *Pokud f je lipschitzovská s libovolnou konstantou c, pak je i spojitá.*

Příklad 20. Buď (M, ρ) metrický, $A \subseteq M$ neprázdná. Pak funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je 1-lipschitzovská (a tedy i spojitá).

Uvažujme $x, z \in M$; chceme $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(z, A)| \leqslant \rho(x, z)$. Označme je tak, že platí $\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(z, A) \geqslant 0$, a pro spor předpokládejme $\rho(x, z) < \inf_{y \in A} \rho(x, y) - \inf_{y \in A} \rho(z, y)$. Dostaneme $\inf_{y \in A} \rho(x, y) > \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \inf_{y \in A} \rho(x, z) + \rho(z, y) \geqslant \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, což je spor. ▲

Důsledek.
- *Pro a pevné je $x \mapsto \rho(x, a)$ 1-lipschitzovská.*
- *Projekce $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ jsou lipschitzovské.*

Věta 21. *Buďte $(X, \rho), (Y, \sigma)$ metrické, $f : X \to Y$ zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) f je spojitá na X ;

(2) $\forall U \subseteq Y$, otevřená : $f^{-1}(U)$ je otevřená (v (X, ρ));

(3) $\forall F \subseteq Y$, uzavřená : $f^{-1}(F)$ je uzavřená (v (X, ρ)).

Důkaz.

(2)⇔(3) Je $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

(1)⇒(2) Buď f spojitá, nechť U je otevřená v Y, neprázdná (triviální). Chceme, aby $f^{-1}(U)$ byla otevřená v X. Nechť $x \in f^{-1}(U)$ libovolné, chceme $x \in (f^{-1}(U))^O$. Označme $y = f(x)$ a z otevřenosti U nalezněme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Ze spojitosti f k němu nalezněme $\delta > 0$ takové, že $\forall a \in X : \rho(a, x) < \delta \Rightarrow f(a) \in B(y, \varepsilon)$. Platí tedy $f(B(x, \delta)) \subseteq B(y, \varepsilon)$, pro vzor pak $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(y, \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$. Tedy x je vnitřní bod $f^{-1}(U)$, a tedy je $f^{-1}(U)$ otevřená.

(2)⇒(1) Volme $x \in X$ a pak $\varepsilon > 0$, chceme nalézt $\delta > 0$ tak, že platí $a \in B(x, \delta) \Rightarrow f(a) \in B(f(x), \varepsilon)$. Množina $B(f(x), \varepsilon)$ je otevřená, tedy její vzor je otevřená množina, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Pro libovolné $a \in B(x, \delta)$ je tak $f(a) \in B(f(x), \varepsilon)$, tedy f je spojitá v x.

□

Příklad 22. V praxi časté důkazy otevřenosti/uzavřenosti množin využívají věty 21. Například:
Nechť $(a, b) \in \mathbb{R}^2, r > 0$ a položme

$$A_{(a,b),r} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\right\}$$

Tato množina je otevřená, což dokážeme takto: Položme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Dá se ukázat, že f je spojitá funkce. Zřejmě pak platí $A_{(a,b),r} = f^{-1}((-\infty, r^2))$, z čehož věta 21 dá otevřenost. Zde bylo ovšem rovnou vidět, že $A_{(a,b),r} = B_{\rho_e}((a, b), r)$ a my již víme, že $B_{\rho_e}((a, b), r)$ je otevřená množina.
Složitější: $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{\sin(x^2y^3)} > 2\right\}$
Špatný postup: Funkce $f(x, y) = \frac{y}{\sin(x^2y^3)}$ je spojitá, tedy $A = f^{-1}((2, \infty))$ je otevřená podle 21.
Problém je v tom, že f je spojitá na svém definičním oboru a nikoliv na $\mathbb{R}^2$.
Správný postup: Pišme

$$\begin{aligned} A =&\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2y^3) > 0 \wedge y > 2\sin(x^2y^3)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2y^3) < 0 \wedge y < 2\sin(x^2y^3)\} \\ =&(\underbrace{g^{-1}((0, \infty))}_{1} \cap \underbrace{h^{-1}((0, \infty))}_{2}) \cup (\underbrace{g^{-1}((-\infty, 0))}_{3} \cap \underbrace{h^{-1}((-\infty, 0))}_{4}), \end{aligned}$$

kde $g(x, y) = \sin(x^2y^3)$ a $h(x, y) = y - 2\sin(x^2y^3)$. Funkce g, h jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, a tedy vzory 1-4 jsou otevřené množiny podle 21. Potom i A je otevřená dle 11. ▲

Definice 23. Buďte (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory, $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je

- **stejnoměrně spojité**, jestliže

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in X : \rho(x, x') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon;$$

  [Záměnou pořadí na $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in X$ dostaneme běžnou spojitost v každém bodě prostoru X. Podstatou stejnoměrné spojitosti je, že existuje „univerzální δ“, které lze použít pro všechna x, tedy závisí pouze na ε.]

- **izometrie**, jestliže $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \sigma(f(x), f(y))$;

- **homeomorfismus**, jestliže f je bijekce, spojitá a f^{-1} je spojitá.

Dále řekneme, že prostory X, Y jsou **homeomorfní**, jestliže existuje homeomorfismus X na Y. Podobně definujeme **izometrické** prostory.

Příklad 24.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$ je izometrie $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ (se standardní metrikou).

- Platí: izometrie $\left\{\begin{array}{llll} \overset{(1)}{\Rightarrow} & \text{lipschitzovskost} & \overset{(2)}{\Rightarrow}\ \text{stejnoměr. spojitost} & \overset{(3)}{\Rightarrow} \\ \overset{(4)}{\Rightarrow} & & \text{homeomorfismus} & \overset{(5)}{\Rightarrow} \end{array}\right\}$ spojitost.

- Pro žádnou z implikací (1)-(5) neplatí implikace opačná:
  (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$ je lipschitzovská, není izometrie.
  (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ je stejnoměrně spojitá, není lipschitzovská.
  (3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ je spojitá, není stejnoměrně spojitá.
  (4) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg}(x)$ je homeomorfismus, není izometrie.
  (5) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$ je spojitá, není homeomorfismus.

- Funkce tg není stejnoměrně spojitá, zato arctg ano.

- sin je 1-lipschitzovská, a tedy stejnoměrně spojitá, funkce arcsin je stejnoměrně spojitá, ale ne lipschitzovská.

- Uvažujme metrický prostor $\left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \rho\right)$, kde $\rho(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$. Pak

  $$\operatorname{tg} : \left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \rho\right) \to (\mathbb{R}, \rho_e), \quad \operatorname{arctg} : (\mathbb{R}, \rho_e) \to \left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \rho\right)$$

  jsou izometrie.

- Buď M libovolná množina, $d : M \times M \to [0, \infty)$ diskrétní metrika na M a $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ libovolná jiná metrika. Pak zobrazení $\mathrm{id} : M \to M, \mathrm{id}(x) = x$ je spojité z (M, d) do (M, ρ).

▲

Tvrzení 25. *Buďte $(X, \rho), (Y, \sigma)$ metrické prostory, $f : X \to Y$ jejich homeomorfismus. Definujeme pro všechna $y, y' \in Y$ zobrazení $\sigma_1 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ předpisem $\sigma_1(y, y') = \rho(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$. Pak*

(1) σ_1 je metrika na Y,

(2) $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma_1)$ je izometrie,

(3) metriky σ a σ_1 jsou topologicky ekvivalentní.

Definice 26. Řekneme, že metriky σ, σ_1 na Y jsou **topologicky ekvivalentní**, jestliže

$$\{A \subseteq Y : A \text{ je otevřená v } (Y, \sigma)\} = \{A \subseteq Y : A \text{ je otevřená v } (Y, \sigma_1)\}.$$

Systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru se nazývá **topologie na** Y, definice tedy říká, že metriky σ a σ_1 generují stejnou topologii.

Důkaz tvrzení 25. (1) Symetrie σ_1 plyne ihned z definice a symetrie ρ; koincidence je splněna, protože f^{-1} je prosté, trojúhelníková nerovnost je triviální.

(2) Nechť $x, y \in X$. Pak z definice $\sigma_1(f(x), f(y)) = \rho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) = \rho(x, y)$.

(3) Nechť $U \subseteq Y$ je otevřená v (Y, σ); pak $f^{-1}(U)$ je otevřená v (X, ρ) dle 21. Dále $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma_1)$ je izometrie, tedy i f^{-1} je izometrie (a tudíž je spojitá). Pak $U = f(f^{-1}(U)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U))$ je tedy otevřená v (Y, σ_1) dle 21.

Je-li U otevřená v (Y, σ_1), pak z izometrie f je i $f^{-1}(U)$ otevřená. Z předpokladu je f^{-1} spojitá $(Y, \sigma) \to (X, \rho)$, tedy i $(f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U)) = U$ je otevřená v (Y, σ).

□

Příklad 27. Metriky ρ, ρ_1 na množině X jsou topologicky ekvivalentní, právě když $\mathrm{id} : (X, \rho) \to (X, \rho_1)$ je homeomorfismus.

K důkazu použijeme opět větu 21: Nechť každá $U \subseteq X$ otevřená v (X, ρ_1), přičemž $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$, je také otevřená v (X, ρ). Proto id je spojitá. Stejně postupujeme pro id^{-1} a dostáváme tak, že id je homeomorfismus. Naopak, nechť id je homeomorfismus. Pokud je $U \subseteq X$ otevřená v (X, ρ_1), pak $\mathrm{id}^{-1}(U) = U$ je otevřená i v (X, ρ) a naopak. ▲

Věta 28. *Buďte ρ_1, ρ_2 metriky na množině X. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou topologicky ekvivalentní, právě když*

$$\begin{aligned} &(\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X : \rho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_2(x, y) < \varepsilon) \\ \wedge\ &(\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X : \rho_2(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_1(x, y) < \varepsilon) \end{aligned}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že daný výrok znamená, že $\mathrm{id} : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ je homeomorfismus, pak můžeme aplikovat příklad 27. □

Příklad 29. Je-li (X, ρ) metrický prostor, můžeme definovat zobrazení $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ předpisem $\rho_1(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}, x, y \in X$. Pak ρ_1 je metrika a je topologicky ekvivalentní s ρ.

Pro blízké body je vzdálenost stejná, maximální vzdálenost v (X, ρ_1) je rovná 1, prostor (X, ρ_1) je tedy omezený. V globálním smyslu se mohou ρ a ρ_1 velmi lišit, v lokálním jsou ale stejné a to je to důležité pro topologickou ekvivalenci. ▲

Definice 30. Buď (X, ρ) metrický prostor, $A \subseteq X$. Definujeme $\operatorname{diam}_\rho A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ **průměr** (diametr) množiny A. Píšeme též $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam}_\rho A$. Řekneme, že A je **omezená**, jestliže $\operatorname{diam} A < \infty$. Dále řekneme, že metrika ρ na X je **omezená**, jestliže X je omezená (též říkáme, že prostor (X, ρ) je omezený).

Příklad 31.
- Buď (X, ρ) metrický, $x \in X, r > 0$. Pak $\operatorname{diam} B(x, r) \leqslant 2r$, ale nemusí se nutně rovnat.
- Uvažujme metriku ρ_1 z příkladu 29. Pak $\operatorname{diam}_{\rho_1} X \leqslant 1$.

- Budiž posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ konvergentní. Pak $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.
- Uvažujme metriku σ_1 na $\mathbb{R}$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}$ předpisem $\sigma_1 = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. [Jde skutečně o metriku dle tvrzení 25, kde roli f hraje $\operatorname{tg} : ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \rho_e) \to (\mathbb{R}, \rho_e)$.] Podle 25 jsou metriky ρ_e a σ_1 topologicky ekvivalentní, $\operatorname{diam}_{\rho_e} \mathbb{R} = \infty, \operatorname{diam}_{\sigma_1} \mathbb{R} = \pi$, tedy $\mathbb{R}$ je v σ_1 omezená.

▲

2 Operace s metrickými prostory

Definice 32. Je-li (X, ρ) metrický prostor a $Y \subseteq X$, pak metrický prostor $(Y, \rho \restriction_{Y \times Y})$ nazýváme **podprostorem** prostoru (X, ρ) a značíme (Y, ρ).

Je očividné, že pokud ρ je metrika na X, pak zúžení na Y^2 je metrika na Y.

Tvrzení 33. *Buď (X, ρ) metrický prostor, $Y \subseteq X$. Pak*

(1) Pokud $G \subseteq X$ je otevřená v (X, ρ), pak $G \cap Y$ je otevřená v (Y, ρ),

(2) Pokud G' je otevřená v (Y, ρ), potom existuje $G \subseteq X$ taková, že $G' = G \cap Y$ a G je otevřená v (X, ρ).

Důkaz. (1) Stačí si uvědomit, že v prostoru Y nezáleží na bodech v $X \setminus Y$, tedy že $B_{(Y,\rho)}(y, r) = B_{(X,\rho)}(y, r) \cap Y$.

(2) Buď G' otevřená v (Y, ρ), pak zjevně $\forall x \in G' \; \exists \varepsilon > 0 : B_{(Y,\rho)}(x, \varepsilon) \subseteq G'$ podle definice otevřenosti, čímž určeme vhodné zobrazení $\varepsilon(x)$. Zřejmě platí $G' = \bigcup_{x \in G'} B_{(Y,\rho)}(x, \varepsilon(x))$. Položme $G = \bigcup_{x \in G'} B_{(X,\rho)}(x, \varepsilon(x))$, což je otevřená množina a navíc platí $G' = G \cap Y$.

□

Definice 34. Mějme metrické prostory $(X_\alpha, \rho_\alpha), \alpha \in I$, které splňují $\forall \alpha \in I : \operatorname{diam}_{\rho_\alpha} X_\alpha \leqslant 1$. **Sumou prostorů** $(X_\alpha, \rho_\alpha), \alpha \in I$, nazýváme prostor $\sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \rho_\alpha) = (X, \rho)$, kde

$$X = \{(x, \alpha) : \alpha \in I, x \in X_\alpha\}, \quad \rho((x, \alpha), (y, \beta)) = \begin{cases} \rho_\alpha(x, y), \text{ pokud } \alpha = \beta, \\ 1 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Příklad 35.

- Zobrazení ρ z definice je metrika.
- $G \subseteq \sum_{\alpha \in I} (X_\alpha, \rho_\alpha)$ je otevřená, právě když $\forall \alpha \in I : \{x \in X_\alpha : (x, \alpha) \in G\}$ je otevřená v (X_α, ρ_α).

▲

Definice 36. Buďte $(X_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}$, metrické prostory splňující $\forall i \in \mathbb{N} : \operatorname{diam} X_i \leqslant 1$. **Součin** metrických prostorů (X_i, ρ_i) je prostor

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = (X, \rho),$$

kde $X = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} X_i$ a pro $f, g \in X$ je $\rho(f, g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_i(f(i), g(i))}{2^i}$.

Zobrazení v definici je metrika. Že $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ a $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ je jasné, hodnoty jsou nezáporná reálná čísla; řada v definici je vždy konvergentní srovnáním s geometrickou řadou s kvocientem $\frac{1}{2}$. Dále uvažujme $f, g, h \in X$, chceme $\rho(f, h) \leqslant \rho(f, g) + \rho(g, h)$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\rho_i(f(i), h(i)) \leqslant \rho_i(f(i), g(i)) + \rho_i(g(i), h(i))$, z toho plyne nerovnost pro členy, ve výsledku tedy i pro součty řad, což dokazuje i trojúhelníkovou nerovnost.

Tvrzení 37. *Buďte $(X_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}$ metrické, $\forall i \in \mathbb{N} : \operatorname{diam} X_i \leqslant 1$. Nechť $(X, \rho) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i)$ a buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů v X, $f \in X$. Pak*

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ v } (X, \rho) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} f_n(i) = f(i) \text{ v } (X_i, \rho_i).$$

Jinými slovy konvergence v (X, ρ) je konvergence po složkách.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Nechť $f_n \longrightarrow f$. Budiž dáno $i_0 \in \mathbb{N}$, chceme $\lim_n f_n(i_0) = f(i_0)$. Budiž $\varepsilon > 0$, pak najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geqslant n_0 : \rho(f_n, f) < \varepsilon 2^{-i_0}$. Tedy

$$\forall n \geqslant n_0 : 2^{-i_0}\varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geqslant \frac{\rho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

z čehož už $\rho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$ pro každé $n \geqslant n_0$.

($\Leftarrow$) Nechť $\forall i \in \mathbb{N} : f_n(i) \longrightarrow f(i)$. Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Najděme $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro všechna $i \in \{1, \dots, i_0\}$ najdeme n_i taková, že $\forall n \geqslant n_i : \rho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$. Položme $\tilde{n} = \max\{n_i : i \leqslant i_0\}$. Pak pro $n \geqslant \tilde{n}$ jest

$$\rho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leqslant i_0 \frac{\frac{\varepsilon}{i_0}}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

$\square$

2.1 Totálně omezené a separabilní metrické prostory

Definice 38. Nechť (M, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq M, \varepsilon > 0$. Řekneme, že

- A je ε-**síť** (pro M), pokud $\forall x \in M\ \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$.
- A je ε-**separovaná**, pokud $\forall x, y \in M : \rho(x, y) \geqslant \varepsilon$.
- M je **totálně omezená**, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subseteq M$ konečná : A je ε-síť pro M.
- M je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina $A \subseteq M$ splňující $\overline{A} = M$.
  (Taková množina A se nazývá **hustá v** M – viz též definici 54.)

2.1.1 Totální omezenost a základní operace s metrickými prostory

Začněme s užitečnou charakterizací totální omezenosti:

Věta 39. *Metrický prostor (M, ρ) je totálně omezený, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je každá ε-separovaná podmnožina konečná.*

Důkaz. Nejprve ukážeme pomocné tvrzení:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall A \subseteq M : A \text{ je } \varepsilon\text{-separovaná } \Rightarrow \exists B \supseteq A : B \text{ je maximální } \varepsilon\text{-separovaná}.$$

Důkaz pomocného tvrzení. Použijeme Zornovo lemma
Zornovo lemma (princip maximality). *Nechť $(P, \leqslant)$ je neprázdná uspořádaná množina splňující, že každý její řetězec má majorantu. Pak existuje maximální prvek v P.*

Aplikujeme jej na množinu $P = \{B \subseteq M : A \subseteq B \wedge B \text{ je } \varepsilon\text{-separovaná}\}$ uspořádanou inkluzí. Ověříme předpoklady principu maximality. Zvolme řetězec $\mathcal{F} \subseteq P$, pak

- $\bigcup \mathcal{F}$ je horní závorou $\mathcal{F}$. Protože $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.
- $\bigcup \mathcal{F} \in P$. Chceme ověřit, že $\bigcup \mathcal{F}$ je ε-separovaná, zvolme tedy $x, y \in \bigcup \mathcal{F}$, pro ně tedy existují $B_x, B_y \in \mathcal{F}, x \in B_x, y \in B_y$. Z lineární uspořádanosti $\mathcal{F}$ plyne $B_x \subseteq B_y \vee B_y \subseteq B_x$, z čehož $\{x, y\} \subseteq B_x$ nebo $\{x, y\} \subseteq B_y$. Z obou plyne $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$, protože B_x i B_y jsou ε-separované.

Tím pádem existuje maximální prvek v P a to je hledané B. $\blacksquare$

Nyní vlastní důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon > 0, B$ je ε-separovaná, chceme ukázat, že B je konečná. Protože M je totálně omezený, existuje konečná $A \subseteq M$ $\frac{\varepsilon}{4}$-síť pro M. Pro každé $x \in B$ zvolme $a_x \in A : \rho(x, a_x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pak pro $x, y \in B$ různá máme

$$\rho(a_x, a_y) \geqslant \rho(x, y) - \rho(x, a_x) - \rho(y, a_y) \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

tedy $a_x \neq a_y$. Potom zobrazení $B \to A, x \mapsto a_x$ je prosté, tedy pro mohutnosti platí $B \preceq A$ a jelikož A je konečná, tak i B je konečná.

$\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$. Dle pomocného tvrzení existuje $B \subseteq M$, která je maximální ε-separovaná a dle předpokladu je konečná. Zvolme $x \in M$, pak existuje $b \in B : \rho(x, b) < \varepsilon$, jinak by B nebyla maximální. Tedy B je ε-síť pro M.

□

Totální omezenost se zachovává na podprostory:

Věta 40. *Buď (M, ρ) totálně omezený metrický prostor, $N \subseteq M$. Pak (N, ρ) je totálně omezený.*

Důkaz. Přímo aplikujeme větu 39. Je-li $A \subseteq N$ ε-separovaná v N, je taky ε-separovaná v M, ale potom je konečná. □

Totální omezenost se zachovává na uzávěry:

Věta 41. *Buď (M, ρ) metrický, $N \subseteq M$. Je-li (N, ρ) totálně omezený, pak i $(\overline{N}, \rho)$ je totálně omezený.*

Důkaz. Zafixujeme $\varepsilon > 0$. Nechť $A \subseteq N$ je konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť pro N. Chceme ukázat, že A je ε-síť pro $\overline{N}$. Zvolme $x \in \overline{N} = N \cup H(N)$. Pokud $x \in N$, pak existuje $a \in A, \rho(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pokud $x \in H(N) \setminus N$, pak $B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap N \neq \emptyset$, a tedy existuje $y \in N : \rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{4}$ a také existuje $a \in A : \rho(y, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak ale $\rho(x, a) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, a) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Tedy opravdu A je ε-síť pro $\overline{N}$. □

Totální omezenost a sumy prostorů:

Věta 42. *Nechť $(M_\alpha, \rho_\alpha), \alpha \in I$ jsou neprázdné metrické prostory splňující* $\operatorname{diam} M_\alpha \leqslant 1, \alpha \in I$. *Pak $(M, \rho) \coloneqq \sum\limits_{\alpha \in I}(M_\alpha, \rho_\alpha)$ je totálně omezený, právě když I je konečná a $\forall \alpha \in I : (M_\alpha, \rho_\alpha)$ je totálně omezený.*

Důkaz. Případ $\varepsilon > 1$ je triviální. Buď tedy $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

$\Rightarrow$ Zafixujme $\alpha \in I$. Buď $A \subseteq M$ konečná ε-síť pro M, pak $\{x \in M_\alpha : (x, \alpha) \in A\}$ je neprázdná a je to ε-síť pro M_α. Že I nemůže být nekonečná plyne z libovolné volby $\varepsilon < 1$.

$\Leftarrow$ Buď pro $\alpha \in I$ A_α konečná ε-síť pro M_α, pak $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \times \{\alpha\}$ je konečná a ε-síť pro M.

□

Totální omezenost a součiny prostorů:

Věta 43. *Nechť $(M_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}$ jsou neprázdné metrické prostory splňující* $\operatorname{diam} M_i \leqslant 1, i \in \mathbb{N}$. *Pak $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}}(M_i, \rho_i)$ je totálně omezený, právě když $\forall i \in \mathbb{N} : (M_i, \rho_i)$ je totálně omezený.*

Důkaz. Označme $(M, \rho) = \prod_{i \in \mathbb{N}}(M_i, \rho_i)$.

$\Rightarrow$ Pro každé $i \in \mathbb{N}$ zvol $a_i \in M_i$ libovolné. Zobrazení $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i}) \to M, x \mapsto (a_1, \ldots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots)$ je izometrie, tedy $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i})$ je izometrické podprostoru M. Dle věty 40 je pak $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i})$ totálně omezený, a tedy i (M_i, ρ_i) je totálně omezený, neboť totální omezenost se jistě zachovává při přenásobení metriky kladným reálným číslem.

$\Leftarrow$ Zafixujme $\varepsilon > 0$. Zvolíme i_0 takové, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}$ a $a \in M$. Pro $i \leqslant i_0$ najdeme konečnou $A_i \subseteq (M_i, \rho_i)$ $\frac{\varepsilon}{4}$-síť. Ukažme, že $S \coloneqq \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in A_i \text{ pro } i \leqslant i_0, x_i = a_i \text{ pro } i > i_0\}$ je (konečná) ε-síť pro M. Zvolme tedy $y \in M$. Pro $i \leqslant i_0$ najdeme $x_i \in A_i$ taková, že $\rho(y_i, x_i) < \frac{\varepsilon}{4}$. Označme $x = (x_1, \ldots, x_{i_0}, a_{i_0+1}, \ldots) \in S$. Pak

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

□

2.1.2 Charakterizace separability

Věta 44. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) (M, ρ) je separabilní;

(2) Existuje spočetná množina I a koule $B_i = B(x_i, r_i)$, $i \in I$, tak, že každá otevřená množina je sjednocením koulí z $\{B_i, i \in I\}$;

(3) Každý podprostor M je separabilní;

(4) Každá ε-separovaná podmnožina je spočetná.

Důkaz.

(1) $\Rightarrow$ (2). Nechť $D \subseteq M$ je spočetná a taková, že $\overline{D} = M$. Označme $I = \{(d, \frac{1}{n}) : d \in D, n \in \mathbb{N}\}$, to je spočetná množina. Pro $t \in I, t = (d, \frac{1}{n})$ položme $B_t = B(d, \frac{1}{n})$. Nechť $U \subseteq M$ je otevřená, pak označme $J = \{i \in I : B_i \subseteq U\}$. Chceme tedy ukázat $U = \bigcup_{i \in J} B_i$, přičemž inkluze $\supseteq$ je zřejmá. Dále nechť $x \in U$, protože U je otevřená, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak aby $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$ a najděme $\tilde{d} \in D$ tak, že $\rho(x, \tilde{d}) < \frac{1}{n}$, tedy $x \in B(\tilde{d}, \frac{1}{n})$, chceme $B(\tilde{d}, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Buď $y \in B(\tilde{d}, \frac{1}{n})$, pak $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, \tilde{d}) + \rho(\tilde{d}, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon$, a tedy $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Pro $N \subseteq M$ označme $O_i = B_i \cap N, i \in I$. Pak pokud U je otevřená množina v N, existuje množina V otevřená v M, že $U = V \cap N$. Pro ni tedy existuje $J \subseteq I$, že $V = \bigcup_{j \in J} B_j$, potom ale také $U = N \cap V = N \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} O_j$. Označme dále $I' \subseteq I$ množinu indexů vzniklou odebráním $i \in I$, pro která $O_i = \emptyset$. Pak lze stále každou otevřenou množinu v N vyjádřit jako sjednocení množin ze souboru $O_i, i \in I'$. Vyberme libovolně $a_i \in O_i, i \in I'$, potom množina $\{a_i, i \in I'\}$ protne každou neprázdnou otevřenou množinu v N, je tedy hustá (viz poznámku pod definicí 54), dále je spočetná, tedy N je separabilní.

(3) $\Rightarrow$ (4). Nechť $\varepsilon > 0$ a $A \subseteq M$ je ε-separovaná. Dle (3) je (A, ρ) separabilní, buď tedy spočetná $D \subseteq A, \overline{D} = A$. Pro $x \in A$ je tedy $B_A(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D \neq \emptyset$, tedy $x \in D$, protože $B_A(x, \frac{\varepsilon}{2}) = \{x\}$. Pak je $A = D$, tedy A je spočetná.

(4) $\Rightarrow$ (1). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ ať $A_n \subseteq M$ je maximální $\frac{1}{n}$-separovaná množina. Každá A_n je tedy $\frac{1}{n}$-síť pro M (podle důkazu věty 39). Dle (4) je tedy $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ spočetná množina. Ukažme $\overline{D} = M$. Zvolme $x \in M$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ nalezneme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\varepsilon > \frac{1}{n}$, a $y \in A_n \subseteq D : \rho(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, takže $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ (y je elementem tohoto průniku). Tím pádem buď $x \in D$, nebo $x \in D^C$ a zároveň pro všechna $\varepsilon > 0$ je $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$; odtud plyne $x \in H(D)$. V obou případech $x \in \overline{D}$.

□

Příklady. (1) Pro neprázdné prostory $(M_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}$ splňující $\operatorname{diam}_{\rho_i} M_i \leqslant 1, i \in \mathbb{N}$ platí, že $\prod_{i \in \mathbb{N}} (M_i, \rho_i) = (M, \rho)$ je separabilní $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : (M_i, \rho_i)$ je separabilní.

$\Leftarrow$ Pro $i \in \mathbb{N}$ nechť A_i je spočetná množina splňující $\overline{A_i} = M_i$. Zafixujme $a \in \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} A_i$, pak položme pro $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \left\{x \in \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} A_i : \forall m > n \colon x(m) = a(m)\right\}$$

Potom S_n má mohutnost kartézského součinu konečně mnoha spočetných množin $A_1, \dots, A_n$, je tedy spočetná. Dále položme $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_n$, ta je také spočetná, ukažme $\overline{S} = M$. Ať $\varepsilon > 0$, $x \in M$; najděme $i_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$, dále pro $n \leqslant i_0$ můžeme nalézt $b_n \in A_n$, že $\rho_n(x(n), b_n) < \frac{\varepsilon}{2i_0}$. Potom pro $b = (b_1, b_2, \dots, b_{i_0}, a(i_0 + 1), \dots)$ platí $b \in S_{i_0}$ a

$$\rho(x, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x(i), b(i))}{2^i} \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\rho_i(x(i), b_i)}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\rho_i(x(i), a(i))}{2^i} \leqslant i_0 \frac{\varepsilon}{2i_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Poznámka: Je dobré si povšimnout podobnosti tohoto důkazu s důkazem druhé implikace ve větě 43. Myšlenka je následující: Je dáno $\varepsilon > 0$, které určuje míru přesnosti, které v daný moment chceme dosáhnout (tj. chceme najít bod naší spočetné množiny S, který je ε-blízko danému bodu $x \in M$). Vzhledem k definici součinové metriky je zřejmé, že souřadnice s vyššími indexy mají na vzdálenost menší vliv. Stačí se tedy soustředit na „dostatečně velký“ (v závislosti na ε), ale konečný, počet souřadnic, na nichž dbáme o „co nejvyšší přesnost“ (tj. co nejvíce se přiblížíme příslušným souřadnicím bodu x); všechny zbývající souřadnice (tj. s indexem od i_0 dále) ani v nejhorším případě nedají v součtu příliš velkou chybu (tj. větší než $\frac{\varepsilon}{2}$)), a tedy je můžeme úplně ignorovat. Je nyní snad jasné, že pro menší hodnoty ε musíme „kontrolovat“ větší konečný počet souřadnic, odkud plyne nutnost definovat onu hustou množinu jako $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, kde S_n pro větší a větší n kontroluje víc a víc souřadnic, takže „funguje“ pro menší a menší hodnoty ε.

$\Rightarrow$ Prostor $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i})$ je isometrický nějakému podprostoru (M, ρ), který je podle charakterizace separabilní.

(2) $\mathbb{R}$ je separabilní, ale nikoliv totálně omezený.

Platí například $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, což dává separabilitu. Není totálně omezený, neboť $\mathbb{N}$ je nekonečná 1-separovaná podmnožina.

(3) Platí, je-li (M, ρ) totálně omezený, pak je separabilní.

Z totální omezenosti plyne, že každá ε-separovaná množina je konečná, tedy je i spočetná, z čehož plyne separabilita.

(4) Nechť c_0 značí množinu posloupností reálných čísel konvergujících k 0 a uvažujme na ní metriku

$$d_\infty((a_n), (b_n)) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Pak (c_0, d_∞) je separabilní a není totálně omezený.

Pokud označíme $c_\mathbb{Q}$ množinu racionálních posloupností konvergujících k 0 s konečně mnoha nenulovými členy, pak $c_\mathbb{Q}$ je spočetná podmnožina c_0. Ke každé posloupnosti v c_0 lze také najít racionální posloupnost v $c_\mathbb{Q}$, která je libovolně blízko, tudíž platí $\overline{c_\mathbb{Q}} = c_0$ a c_0 je separabilní. Definujeme posloupnosti $s_i = (i, 0, 0 \ldots)$ pro $i \in \mathbb{N}$, jistě každá s_i konverguje k 0 a množina $\{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná 1-separovaná podmnožina c_0.

(5) Důkaz věty 44 nedává návod, jak najít spočetnou hustou množinu v podprostoru.

▲

Příklad (Prostor $\mathcal{C}([0,1])$). Jedním z důležitých metrických prostorů v analýze je prostor

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ je spojitá, }\}$$

který obvykle uvažujeme s normou $\|f\|_\infty := \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$, takže můžeme uvažovat metriku $(f, g) \mapsto \|f - g\|_\infty := \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

(1) $\mathcal{C}([0,1])$ je separabilní metrický prostor.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ nechť $f_n^{q_1,\ldots,q_n}$ je funkce, která splňuje

(a) $f_n^{q_1,\ldots,q_n}(\frac{j}{n}) = q_j$ pro $0 \leqslant j \leqslant n$,

(b) na intervalech tvaru $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, je lineární.

Grafy těchto funkcí jsou tedy spojité lomené čáry, sestávající z úseček jejichž koncové body mají racionální souřadnice. Polož $D = \{f_n^{q_1,\ldots,q_n} : n \in \mathbb{N}, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}\}$. To je spočetná množina.

Ukažme $\overline{D} = \mathcal{C}([0,1])$. Nechť tedy $g \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Chceme najít $n \in \mathbb{N}, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ tak, že $\|f_n^{q_1,\ldots,q_n} - g\|_\infty < \varepsilon$. Jelikož g je spojitá $[0,1] \to \mathbb{R}$, je také stejnoměrně spojitá (fakt z analýzy, zde důkaz nebyl). Tedy nalezneme $\delta > 0$ takové, že $|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \delta$ a najděme $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ taková, že

$$\left|g\left(\frac{j}{n}\right) - q_j\right| < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{pro } 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Položme $f := f_n^{q_1,\dots,q_n}$. Pak pro každé $x \in [0,1]$ platí: zvolme $j \in \{0,\dots,n-1\}$, kde $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$; pak

$$|g(x) - f(x)| \leqslant \left|g(x) - g\Big(\frac{j}{n}\Big)\right| + \left|g\Big(\frac{j}{n}\Big) - f\Big(\frac{j}{n}\Big)\right| + \left|f\Big(\frac{j}{n}\Big) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \left|f\Big(\frac{j}{n}\Big) - f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\right|,$$

jelikož f je lineární. Další odhady dávají:

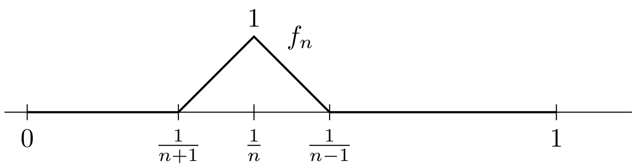
$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{5} + \left|f\Big(\frac{j}{n}\Big) - g\Big(\frac{j}{n}\Big)\right| + \left|g\Big(\frac{j}{n}\Big) - g\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\right| + \left|g\Big(\frac{j+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

□

(2) Zadefinujme $f_0 \equiv 0$ [tj. $f_0(x) = 0, x \in [0,1]$]. Pak $B(f_0, 2)$ je omezená množina, ale není totálně omezená.

Důkaz. Omezenost koule je zřejmá.

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$ zvolme $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, která splňuje $f_n(\frac{1}{n}) = 1, f_n(x) = 0$ pro $x \in [0, \frac{1}{n+1}] \cup [\frac{1}{n-1}, 1]$.



Pak pro $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ různá, máme

$$\|f_n - f_m\|_\infty \geqslant |(f_n - f_m)(\frac{1}{n})| = |1 - 0| = 1.$$

Tedy jsme našli nekonečnou 1-separovanou množinu v $\mathcal{C}([0,1])$, přičemž $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\infty \leqslant 1$, tedy dokonce v $B(f_0, 2)$, tedy ta není totálně omezená. □

▲

2.2 Úplné metrické prostory

Definice 45. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost v něm. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geqslant n_0 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Definice 46. Metrický prostor (M, ρ) nazveme **úplný**, pokud každá cauchyovská posloupnost v M je konvergentní v M.

Poznámka. Snadné cvičení na důkazové techniky prvního semestru analýzy je, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace neplatí ve všech prostorech, přičemž ty prostory, v nichž platí, se podle předchozí definice nazývají úplné.

Příklady.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný (1. semestr analýzy).
- $\mathcal{C}([0,1])$ je úplný.

  Mějme dánu cauchyovskou posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ v $\mathcal{C}([0,1])$, chceme najít $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ke kterému konverguje. Pro pevné $x \in [0,1]$ ověřme, že $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$. Pro $\varepsilon > 0$ najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n, m \geqslant n_0$ je $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, potom i $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Pro každé $x \in [0,1]$ tak můžeme najít $L_x := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Sestrojme funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto L_x$, ověřme, že je hledanou limitou.

Nejprve ověříme, že $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Pro $\varepsilon > 0$, $x \in [0,1]$ chceme najít $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in [0,1]$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n, m \geqslant n_0$ je $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Dále buď $\delta > 0$ takové, že $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ pro $y \in [0,1]$ splňující $|x-y| < \delta$; existence takového δ plyne ze spojitosti funkce f_{n_0} v bodě x. Potom pro $n > n_0$ a $|x-y| < \delta$ je

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leqslant |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_n(y)| \\ &\leqslant \|f_{n_0} - f_n\|_\infty + \frac{\varepsilon}{4} + \|f_{n_0} - f_n\|_\infty < \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

Potom $|L_x - L_y| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$, tedy f je spojitá.

Nyní ukažme, že $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$. Volme $\varepsilon > 0$ a najděme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m \geqslant n_1$: $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Potom pro $n \geqslant n_1$

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_n(x) - f_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_1}(x)|.$$

Zafixujme $x \in [0,1]$ a k němu najděme $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geqslant n_1$, takové, že $|f_m(x) - L_x| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro $m \geqslant n_2$. Potom $|f(x) - f_{n_1}(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$. Jelikož x bylo libovolné, platí pro $n \geqslant n_1$

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy $\lim_n f_n = f$.

▲

2.2.1 Úplnost a základní operace s metrickými prostory

Začněme s charakterizací úplnosti:

Věta 47 (Cantor)**.** *Metrický prostor (M, ρ) je úplný právě tehdy, když pro každou posloupnost neprázdných uzavřených množin $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ splňující* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_\rho F_n = 0$ *platí* $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme $x_n \in F_n$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ najdeme n_0 takové, že $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Pak pro $n, m \geqslant n_0$ je $x_n, x_m \in F_{n_0}$, a tedy $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Dále z úplnosti, nechť x je limitou $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, pro $i \geqslant n$ máme $x_i \in F_i, F_i \subseteq F_n$, tedy $x_i \in F_n$ a z uzavřenosti pak $x = \lim x_i \in F_n$. Proto $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská. Položme $F_n = \overline{\{x_i : i \geqslant n\}}, n \in \mathbb{N}$. Zřejmě jsou F_n uzavřené, neprázdné a $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$. Ukažme $\operatorname{diam} F_n \longrightarrow 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}, n, m \geqslant n_0$. Chceme $\operatorname{diam} F_{n_0} \leqslant \varepsilon$ (dále pro $n \geqslant n_0$ je $\operatorname{diam} F_n \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0}$). Zvolme tedy $x, y \in F_{n_0}$. Najdeme $i_1, i_2 \geqslant n_0$ tak, že $\rho(x, x_{i_1}) < \frac{\varepsilon}{3}$ a $\rho(y, x_{i_2}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak máme $\rho(x,y) \leqslant \rho(x, x_{i_1}) + \rho(x_{i_1}, x_{i_2}) + \rho(y, x_{i_2}) < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\operatorname{diam} F_{n_0} \leqslant \varepsilon$. Z předpokladu existuje $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$, najdeme n_0 takové, že $\operatorname{diam} F_n < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n \geqslant n_0$. Pak pro $n \geqslant n_0$ máme $\{x, x_n\} \subseteq F_n$, a tedy $\rho(x, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

□

Úplnost se zachovává na uzavřené podprostory:

Věta 48. *Nechť (M, ρ) je úplný metrický prostor a $N \subseteq M$. Pak (N, ρ) je úplný právě tehdy, když N je uzavřená množina v M.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Pokud N není uzavřená, existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v N konvergující k $x \in M \setminus N$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, ale není konvergentní v N.

$\Leftarrow$ Aplikujeme předchozí větu. Pokud $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ jsou uzavřené v N a $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$, jsou uzavřené i v M, a tedy $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$, tedy i N je úplný.

□

Úplnost a součiny prostorů:

Věta 49. *Nechť* $(M_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}$ *jsou metrické prostory splňující* $\operatorname{diam}_{\rho_i} M_i \leqslant 1$ *pro* $i \in \mathbb{N}$. *Pak* $(M, \rho) \coloneqq \prod_{i \in \mathbb{N}} (M_i, \rho_i)$ *je úplný právě tehdy, když pro každé* $i \in \mathbb{N}$ *je* (M_i, ρ_i) *úplný.*

Důkaz.

- $\Rightarrow$ Analogické důkazu $\Rightarrow$ ve větě 43: $\forall i \in \mathbb{N}$ je $(M_i, \frac{\rho_i}{2^i})$ izometrické nějakému uzavřenému podprostoru M, a tedy dle věty 48 je úplný, tedy i (M_i, ρ_i) je úplný.

- $\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v M. Ukažme, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $\{x_n(i)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v (M_i, d_i). Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme n_0 tak, že $\forall n, m \geqslant n_0 : \rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Pak

$$\rho_i(x_n(i), x_m(i)) \leqslant 2^i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(x_n(j), x_m(j))}{2^j} = 2^i \rho(x_n, x_m) < 2^i \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Z předpokladu, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ existuje $a_i \in M_i$ tak, že $x_n(i) \longrightarrow a_i$ sestrojíme $g, g(i) = a_i, i \in \mathbb{N}$, pak $g \in M$ a $x_n \longrightarrow g$.

□

2.2.2 Univerzální úplný metrický prostor $\ell_\infty(I)$ a zúplnění metrických prostorů

Definice 50. Nechť I je množina. $\ell_\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ je omezená}\}$. Na $\ell_\infty(I)$ uvažujme metriku

$$(f, g) \mapsto \|f - g\|_\infty \coloneqq \sup_{i \in I} |f(i) - g(i)|.$$

Tvrzení 51. $\ell_\infty(I)$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Je vidět, že $\|f - g\|_\infty$ je metrika.

Pokud je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\ell_\infty(I)$, pak pro každé $i \in I$ je $\{x_n(i)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$ (neboť $|f(i) - g(i)| \leqslant \|f - g\|_\infty$). Tedy $\forall i \in I \ \exists x(i) : \lim x_n(i) = x(i)$. Pak pro $x : x(i) = \lim_n x_n(i)$ je $x \in \ell_\infty(I)$, protože x je omezená[1], a k tomu ukažme $x_n \longrightarrow x$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n, m \geqslant n_0$ je $\|x_n - x_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Chceme $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$. Zvolme $i \in I$, protože $x_n(i) \longrightarrow x(i)$, najdeme $n_1 \geqslant n_0$ tak, že $|x_{n_1}(i) - x(i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak pro $n \geqslant n_0$ máme

$$|x_n(i) - x(i)| \leqslant |x_n(i) - x_{n_1}(i)| + |x_{n_1}(i) - x(i)| \leqslant \|x_n - x_{n_1}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Protože i bylo libovolné, máme $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$. □

Věta 52 (univerzalita $\ell_\infty(I)$)**.** *Nechť* (M, ρ) *je metrický prostor,* $D = \{x_i : i \in I\}$ *splňuje* $\overline{D} = M$. *Pak existuje izometrie* $\varphi : (M, \rho) \to \ell_\infty(I)$. *Navíc* $(\varphi(x))(i) \coloneqq (\rho(x_i, x) - \rho(x_i, a)), i \in I$, *kde* $a \in M$ *je libovolně zvolený bod.*

Důkaz. Ověřme, že podle této definice $\varphi(x) \in \ell_\infty(I)$, tedy $\varphi(x)$ má být omezená na I. Pro každé $i \in I$ platí $\rho(x_i, x) - \rho(x_i, a) \leqslant \rho(x, a)$, tedy máme horní závoru.

Zvol $x, y \in M$. Pak

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty &= \sup_{i \in I} |\rho(x_i, x) - \rho(x_i, a) - \rho(x_i, y) + \rho(x_i, a)| = \sup_{i \in I} |\rho(x_i, x) - \rho(x_i, y)| \\ &\leqslant \sup_{i \in I} |\rho(x, y)| = \rho(x, y). \end{aligned}$$

Na druhou stranu, pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme $i_0 \in I$ takové, že $\rho(x_{i_0}, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$; pak

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \geqslant |\rho(x_{i_0}, x) - \rho(x_{i_0}, y)| \geqslant \rho(x_{i_0}, y) - \rho(x_{i_0}, x) \geqslant \rho(x, y) - 2\rho(x_{i_0}, x) \geqslant \rho(x, y) - \varepsilon$$

a protože ε bylo libovolné, musí platit $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \geqslant \rho(x, y)$, tedy dohromady $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty = \rho(x, y)$ a φ je izometrie. □

[1] Pro $\varepsilon > 0$ z Cauchyovskosti volme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ pro $n, m \geqslant n_0$ a pro $i \in I$ $n_1^i \geqslant n_0$, že $|x_n(i) - x(i)| < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_1^i$ z limity. Pak $|x_{n_0}(i) - x(i)| \leqslant |x_{n_0}(i) - x_{n_1^i}(i)| + |x_{n_1^i}(i) - x(i)| < 2\varepsilon$ pro každé $i \in I$, tedy i $\sup_{i \in I} |x_{n_0}(i) - x(i)| \leqslant 2\varepsilon$, z čehož už máme omezenost x díky omezenosti x_{n_0}

Důsledek. *Pokud (M,ρ) je separabilní metrický prostor, pak je isometrický podprostoru $\ell_\infty(\mathbb{N})$.*

Důsledek 53 (o zúplnění)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor, pak existuje úplný metrický prostor (X,σ) a $Y \subseteq X$ takový, že (M,ρ) je isometrický s (Y,σ) a navíc $\overline{Y} = X$.*

Důkaz. Nechť $\varphi : M \to \ell_\infty(M)$ je izometrie z předchozí věty ($D = M$), a položme $(X,\sigma) = (\overline{\varphi(M)}, \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

2.2.3 Baireova věta

Definice 54. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $D \subseteq M$. Řekneme, že D je **hustá**, jestliže $\overline{D} = M$.

Poznámka. Je snadné ověřit, že D je hustá v $M \Leftrightarrow \forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in D : \rho(x,y) < \varepsilon \Leftrightarrow D$ protne každou otevřenou kouli v $M \Leftrightarrow D$ protne každou otevřenou množinu v M.

Věta 55 (Baire)**.** *Nechť (M,ρ) je úplný metrický prostor, $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost otevřených hustých množin v M. Pak $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ je hustá množina v M.*

Důkaz. Stačí ověřit, že $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ protne každou otevřenou kouli. Zvolme $x \in M, \varepsilon > 0$ a označme $B = B(x,\varepsilon)$. Jelikož U_1 je otevřená a hustá, existuje $x_1 \in U_1 \cap B$ a $\varepsilon_1 \in (0,1) : B(x_1,\varepsilon_1) \subseteq B \cap U_1$. Induktivně nalezneme $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že

- $\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$,
- $B(x_n,\varepsilon_n) \subseteq U_n, n \in \mathbb{N}$,
- $\overline{B(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})} \subseteq B(x_n,\varepsilon_n), n \in \mathbb{N}$.

Se znalostí předchozích hledejme $x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}$. Protože U_{n+1} je hustá, najdeme $x_{n+1} \in B(x_n,\varepsilon_n) \cap U_{n+1}$. Protože $B(x_n,\varepsilon_n) \cap U_{n+1}$ je otevřená, najdeme $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ takové, že $B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1}) \subseteq B(x_n,\varepsilon_n) \cap U_{n+1}$. Poslední bod potom platí, protože $\overline{B(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})} \subseteq B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1})$. Aplikujeme Cantorovu větu (47) na $F_n \coloneqq \overline{B(x_n,\varepsilon_n)}$, tedy existuje $y \in \bigcap_{n=1}^\infty \overline{B(x_n,\varepsilon_n)}$. Zároveň $\overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subseteq B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \subseteq U_{n-1}, n \geqslant 2$, a tedy $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subseteq \bigcap_{n=2}^\infty U_n \cap U_1 \cap B = (\bigcap_{n=1}^\infty U_n) \cap B$. Tedy $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ protne B a protože B byla libovolná otevřená koule, je $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ hustá v M. $\square$

Poznámka. Baireova věta má dalekosáhlé důsledky. Jeden si uveďme:

- $\mathcal{C}([0,1])$ je separabilní úplný metrický prostor. (bylo)
- Pro $n \in \mathbb{N}$ polož
$$U_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \forall x \in [0,1]\ \exists y \in [0,1], y \neq x : \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} > n \right\}.$$
Pak U_n je otevřená a hustá.
  - ▶ Otevřená: Ukažme, že U_n^C je uzavřená. Uvažujme posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ prvků U_n^C konvergující k f a chceme ukázat, že $f \in U_n^C$. Jelikož $f_k \notin U_n$, musí existovat nějaké $x_k \in [0,1]$ pro které
  $$\forall y \in [0,1] \setminus \{x_k\} : \frac{|f_k(x_k) - f_k(y)|}{|x_k - y|} \leqslant n.$$
  Mějme posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, to jsou prvky $[0,1]$, tedy je omezená a lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ s limitou $x \in [0,1]$. Teď chceme ukázat, že f splňuje $\forall y \in [0,1] \setminus \{x\} : \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant n$. Zafixujme pevné $y \in [0,1], y \neq x$, pro něj má nerovnost platit. Pro posloupnost $\{f_k(y)\}_{k=1}^\infty$ platí $|f_k(y) - f(y)| \leqslant \|f_k - f\|_\infty$, což jde k nule, tedy $\lim_k f_k(y) = f(y)$. Dále platí
  $$|f_{k_l}(x_{k_l}) - f(x)| \leqslant |f_{k_l}(x_{k_l}) - f_{k_l}(x)| + |f_{k_l}(x) - f(x)| \leqslant n|x_{k_l} - x| + \|f_{k_l} - f\|_\infty,$$
  což obojí jde k 0, tedy platí $\lim_l f_{k_l}(x_{k_l}) = f(x)$. Počítejme limitu
  $$\lim_{l\to\infty} \frac{|f_{k_l}(x_{k_l}) - f_{k_l}(y)|}{|x_{k_l} - y|},$$

výraz $|x_{k_l} - y|$ je nulový nejvýše pro konečně mnoho l, tedy limitovaný výraz je dobře definovaný. Potom

$$\lim_{l\to\infty} \frac{|f_{k_l}(x_{k_l}) - f_{k_l}(y)|}{|x_{k_l} - y|} = \frac{|\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(x_{k_l}) - \lim_{l\to\infty} f_{k_l}(y)|}{|\lim_{l\to\infty} x_{k_l} - y|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Jelikož platí požadovaná nerovnost pro každý člen posloupnosti, bude také

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant n$$

a to bylo pro libovolné y, tedy $f \in U_n^C$ a víme, že U_n^C je uzavřená.

▶ Hustá: Mějme dánu $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$ a chceme najít $g \in U_n$ aby $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. f je stejnoměrně spojitá, tedy najdeme $\delta > 0$ takové, že pro $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Položme $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{5n}\}$ a najdeme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{k} < \eta$. Definujeme $2/k$-periodickou funkci $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ takovou, že $s(0) = 0, s(1/k) = \varepsilon, s(2/k) = 0, \ldots$, která je v jednotlivých intervalech lineární. Pak položme $g = f + s$, chceme

$$\frac{|f(x) + s(x) - f(y) - s(y)|}{|x - y|} \geqslant \frac{1}{|x - y|}(|s(x) - s(y)| - |f(x) - f(y)|) > n,$$

tedy $|s(x) - s(y)| > n|x - y| + |f(x) - f(y)|$. Buď $x \in [i/k, (i+1)/k]$, pak volme jako y to z čísel $i/k, (i+1)/k$, které je od něj vzdálenější. Pak totiž platí

$$n|x - y| + |f(x) - f(y)| < n\eta + \frac{\varepsilon}{5} < \frac{1}{2}\varepsilon \leqslant |s(x) - s(y)|.$$

Tedy $g \in U_n$ a $\|g - f\|_\infty = \|s\|_\infty = \varepsilon$.

Dle Baireovy věty je množina $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ hustá.

- Platí, že pokud $f \in \mathcal{C}([0,1])$ má v vlastní derivaci v nějakém bodě, pak $f \notin \bigcap_{n=1}^\infty U_n$.

  Nechť f má reálnou derivaci v bodě $x \in [0,1]$. Pak na nějakém $\delta > 0$ okolí bodu x platí, že $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ je ε-blízko $f'(x)$, volme tedy nějaké n_1 kterým jej omezíme. Dále f je spojitá na uzavřeném intervalu $[0,1]$ a tudíž je na něm omezená, najděme tedy K takové, že $|f(y)| < K$ pro každé $y \in [0,1]$. Potom buď $n_2 > 2K$, tedy $n_2 > |f(x) - f(y)|$ a pro y splňující $|x - y| \geqslant \delta$ platí $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant \frac{n_2}{\delta}$, což označme n_3. Pro $n \in \mathbb{N}, n > n_1, n_3$ pak platí $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < n$ pro každé y, tedy $f \notin U_n$ a tudíž ani $f \notin \bigcap_{n=1}^\infty U_n$.

Tedy existuje spojitá funkce, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě. (A jelikož je $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ hustá, není jich málo.)

2.3 Kompaktní metrický prostor

Definice 56. Nechť φ je systém podmnožin množiny X.

- Řekneme, že φ je **pokrytí**, jestliže $\bigcup \varphi = X$.
- Pokrytí metrického prostoru se nazývá **otevřené**, pokud každý jeho prvek je otevřená množina.
- Řekneme, že systém množin φ má **konečnou průnikovou vlastnost**, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \mathcal{C} \subseteq \varphi : |\mathcal{C}| = n \Rightarrow \bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset.$$

Definice 57. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že je **kompaktní**, jestliže každé otevřené pokrytí φ obsahuje konečnou část $\varphi' \subseteq \varphi$ takovou, že $\bigcup \varphi' = M$.

Definice 58. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subseteq M$. Řekneme, že $x \in M$ je **hromadný bod** A, jestliže $\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (ekvivalentně, pro každé $\varepsilon > 0$ je $B(x, \varepsilon) \cap A$ nekonečná množina).

Věta 59 (charakterizace kompaktnosti)**.** *Nechť (M,ρ) je metrický prostor, následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) (M,ρ) je kompaktní.

(2) Je-li $\mathcal{F}$ soubor uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností, pak $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

(3) Je-li $A \subseteq M$ nekonečná, pak má hromadný bod.

(4) Z každé posloupnosti v M lze vybrat konvergentní podposloupnost.

(5) Každá spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je omezená.

(6) Každá spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ nabývá minima a maxima.

(7) Z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Důkaz. (1)⇒(2) Položme $\varphi = \{F^C : F \in \mathcal{F}\}$, pak φ sestává z otevřených množin a žádná konečná část $\varphi' \subseteq \varphi$ nepokryje M: Uvažujme $F_1^C \cup F_2^C \cup \ldots \cup F_n^C = M$, tedy $M = \bigcup_{i=1}^n F_i^C = \bigcup_{i=1}^n M \setminus F_i = M \setminus \bigcap_{i=1}^n F_i$, tedy $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, spor. Z kompaktnosti tedy plyne, že φ není pokrytí, tedy existuje $x \in M$ takové, že $\forall F \in \mathcal{F} : x \notin F^C$, tedy $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

(2)⇒(1) Buď φ otevřené pokrytí, položme $\mathcal{F} = \{U^C : U \in \varphi\}$. Pak $\mathcal{F}$ sestává z uzavřených množin a $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ [protože $M = \bigcup \varphi = M \setminus \bigcap \mathcal{F}$]. Z předpokladu tedy existují $U_1, \ldots, U_n \in \varphi$ taková, že $\bigcap_{i=1}^n U_i^C = \emptyset$, neboli $\bigcup_{i=1}^n U_i = M$, a tedy tvoří hledané podpokrytí.

(1)⇒(7) triviální

(7)⇒(3) Pro spor předpokládejme, že existuje nekonečná $A \subseteq M$ bez hromadného bodu. Přechodem k podmnožině můžeme předpokládat, že A je spočetná. Pak A neobsahuje prostou konvergentní posloupnost, a proto je uzavřená. Dále pro každé $x \in A$ existuje $\varepsilon(x)$ splňující $B(x, \varepsilon(x)) \cap A = \{x\}$. Pak $\varphi = \{\{M \setminus A\}\} \cup \{\{B(x, \varepsilon(x))\} : x \in A\}$ je spočetné otevřené pokrytí M, a tedy dle (7) existují $x_1, \ldots, x_n \in A$ splňující

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon(x_i)) \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

což je ve sporu s tím, že A je nekonečná.

(3)⇒(1) Nechť φ je otevřené pokrytí M. Ukažme

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in M \; \exists C \in \varphi : B(x, \varepsilon) \subseteq C.$$

Sporem, pro $n \in \mathbb{N}$ nechť existuje $x_n \in M$, že $\forall c \in \varphi : B(x_n, \frac{1}{n}) \setminus c \neq \emptyset$. Pak ukažme, že $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná množina. Uvažujme konečnost, tedy pro nějaké k se x_k použije pro někonečně koulí $B(x_k, \frac{1}{n})$, ale všechny c jsou otevřené a φ je pokrytí, tedy existuje $c', x_k \in c'$ a $\varepsilon > 0, B(x_k, \varepsilon) \subseteq c'$, potom ale od jistého n_0, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ je $n \geqslant n_0, B(x_k, \frac{1}{n}) \subseteq B(x_k, \varepsilon) \subseteq c'$, spor.

Dle (3) tedy má hromadný bod $x \in M$. Protože φ je otevřené pokrytí, najdeme $C_0 \in \varphi, \varepsilon > 0$ tak, že $x \in C_0$ a $B(x, \varepsilon) \subseteq C_0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon$ a zvolme $x_n \in B(x, \frac{1}{2}\varepsilon)$, pak $B(x_n, \frac{1}{n}) \setminus C_0 \subseteq B(x_n, \frac{1}{2}\varepsilon) \setminus C_0 \subseteq B(x, \varepsilon) \setminus C_0 = \emptyset$, spor.

Sporem: Kdyby nyní z φ nešlo vybrat konečné podpokrytí, induktivně sestrojíme nekonečnou ε-separovanou množinu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme $x_1 \in M$ libovolné, C_1 můžeme zvolit tak, že $B(x_1, \varepsilon) \subseteq C_1$. Pokud $x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots C_n$ byly zvoleny, pak najděme $x_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$ a C_{n+1}, že $B(x_{n+1}, \varepsilon) \subseteq C_{n+1}$. Jelikož neexistuje konečné podpokrytí φ, $M \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$ je neprázdná a x_{n+1} lze stále zvolit. Dále pro $m > n$ je $x_m \notin C_n$, tedy také $x_m \notin B(x_n, \varepsilon) \subseteq C_n$, a tedy $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$. ε-separovaná množina ale nemůže mít hromadný bod, spor.

(3)⇒(4) Nechť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost v M. Pokud obsahuje konstantní podposloupnost, jsme hotovi, v opačném případě obsahuje prostou podposloupnost, tedy bez újmy na obecnosti buď $x_n \neq x_m$ pro $n \neq m$. Potom $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná, buď $x \in M$ její hromadný bod. Induktivně najdeme $n_k \in \mathbb{N}$ taková, že $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$ a $\{n_k\}$ je rostoucí. Pak x_{n_k} konverguje k x.

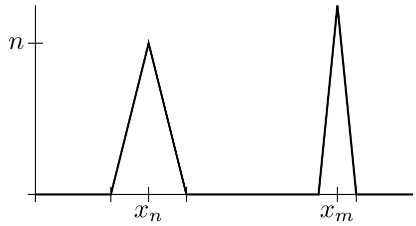
(4)⇒(5) Nechť $f:(M,\rho)\to\mathbb{R}$ je spojitá. Kdyby nebyla omezená, najdeme poloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $|f(x_n)|\geqslant n$ a $x_n\neq x_m$ pro $n\neq m$. Má existovat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $x\in M$ ke kterému konverguje. Dále $|f(x_{n_k})|\geqslant n_k\longrightarrow+\infty$, ale ze spojitosti $|f(x_{n_k})|\longrightarrow|f(x)|\in\mathbb{R}$, spor.

(5)⇒(6) Nechť $f:(M,\rho)\to\mathbb{R}$ je spojitá. Dle (5) je $s:=\sup_{x\in M}f(x)<\infty$. Sporem, kdyby se s nenabývalo, tak $x\mapsto\frac{1}{s-f(x)}$ je spojitá neomezená funkce na M, spor. Podobně inf.

(6)⇒(5) triviální

(5)⇒(3) Sporem, nechť $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ je nekonečná bez hromadného bodu. Bez újmy na obecnosti $x_n\neq x_m$ pro $n\neq m$. Tedy $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\varepsilon_n\in(0,\frac{1}{n}):B(x_n,\varepsilon_n)\cap A=\{x_n\}$. Pak koule $B(x_n,\frac{1}{2}\varepsilon_n),n\in\mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní, neboť z $x\in B(x_n,\frac{1}{2}\varepsilon_n)\cap B(x_m,\frac{1}{2}\varepsilon_m)$ plyne $\rho(x_n,x_m)<\min\{\varepsilon_n,\varepsilon_m\}$, a tedy $x_n\in B(x_m,\varepsilon_m)$ nebo $x_m\in B(x_n,\varepsilon_n)$, spor. Uvažujme funkci

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4n}{\varepsilon_n}\left(\frac{\varepsilon_n}{4}-\rho(x,x_n)\right) & x\in B(x_n,\varepsilon_n/4),\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$



Pak $f(x_n)=n$, a tedy f je neomezená, zároveň je spojitá ve všech bodech:

- Máme $f(y)=\max\left\{\frac{4n}{\varepsilon_n}\left(\frac{\varepsilon_n}{4}-\rho(y,x_n)\right),0\right\},y\in B(x_n,\frac{1}{2}\varepsilon_n)$, tedy f je spojitá na $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B(x_n,\frac{\varepsilon_n}{2})$.
- Pokud $x\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B(x_n,\frac{\varepsilon_n}{2})$, pak existuje $\delta>0$ tak, že $B(x,\delta)\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B(x_n,\frac{\varepsilon}{4})=\emptyset$. Kdyby tomu tak nebylo, pak ze skutečnosti, že $\varepsilon_n\to 0$, bychom snadno odvodili, že x je hromadný bod množiny A (spor). Je tedy $f(y)=0$ pro $y\in B(x,\delta)$, a tedy je f v bodě x spojitá.

Dostali jsme tedy neomezenou spojitou funkci, a (5) neplatí. Tím je důkaz dokončen.

□

Věta 60. *Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Pak je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. ⇒ Nechť $\{F_n\}$ je posloupnost uzavřených, neprázdných a navzájem vnořených množin v (X,ρ), přičemž $\lim\operatorname{diam}F_n=0$. Pak podle charakterizace kompaktnosti 59, (2) je $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$. Potom podle Cantorovy věty charakterizující úplnost 47 je (X,ρ) úplný. Pro totální omezenost, nechť je $\varepsilon>0$. Uvažujme otevřené pokrytí $\{B(x,\varepsilon):x\in X\}$ prostoru (X,ρ), podle definice kompaktnosti existuje jeho konečné podpokrytí, tedy $x_1,\dots,x_n$ taková, že $X=\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon)$. Potom množina $\{x_1,\dots,x_n\}$ je ε-síť, a tedy (X,ρ) je totálně omezený.

⇐ Ukážeme, že každá nekonečná $A\subseteq X$ má hromadný bod. Tím bude díky charakterizaci kompaktnost ověřena. Indukcí nejprve najdeme posloupnost uzavřených množin $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $\operatorname{diam}B_n\leqslant\frac{1}{n}$ a $B_n\cap A$ je nekonečná, pro všechna $n\in\mathbb{N}$.

- Z totální omezenosti existuje konečné pokrytí (např. uzavřenými koulemi) $\{U_1,\dots,U_k\}$ prostoru X, že $\operatorname{diam}U_i\leqslant 1,i\leqslant k$. Tedy existuje $i\leqslant k$, že $U_i\cap A$ je nekonečná, položme $B_1:=U_i$.
- Máme-li již $B_1,\dots,B_n$, víme, že B_n je totálně omezená a $B_n\cap A$ je nekonečná, existuje tedy nějaké konečné pokrytí uzavřenými[2] množinami $\{V_1,\dots,V_l\}$ prostoru B_n takové, že $\operatorname{diam}V_i\leqslant\frac{1}{n+1},i\leqslant l$. Opět musí existovat $j\leqslant l$, že $V_j\cap A$ je nekonečná. Pak položme $B_{n+1}:=V_j$. Tím je konstrukce dokončena.

[2] B_n je uzavřená v X, množiny uzavřené v podprostoru B_n jsou tak uzavřené i v X

Nyní z úplnosti X je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ neprázdná a díky $\operatorname{diam} B_n \longrightarrow 0$ je jednoprvková. Označme její prvek a, ukážeme, že je hromadným bodem množiny A. Buď dáno $\varepsilon > 0$, pak najdeme $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $B_n \subseteq B_\rho(a, \varepsilon)$, tedy také $B_\rho(a, \varepsilon) \cap A$ je nekonečná.

□

Tvrzení 61 (zachovávání kompaktnosti operacemi)**.**

(1) Nechť (X, ρ) je kompaktní, $Y \subseteq X$ uzavřená. Pak podprostor (Y, ρ) je kompaktní.

(2) Je-li (X, ρ) kompaktní a (Y, σ) metrický prostor, $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ spojité, pak $(f(X), \sigma \restriction_{f(X)})$ je kompaktní.

(3) Je-li (X, ρ) metrický, $Y \subseteq X$ a (Y, ρ) kompaktní, pak Y je uzavřená v (X, ρ).

(4) Jsou-li (X_i, ρ_i) kompaktní, $\operatorname{diam}_{\rho_i} X_i \leqslant 1, i \in \mathbb{N}$, pak $(X, \rho) = \prod(X_i, \rho_i)$ je kompaktní.

Důkaz. (1) Dle předchozí věty je (X, ρ) úplný. Jelikož je Y uzavřená, dle 48 je (Y, ρ) úplný. Podprostor totálně omezeného je totálně omezený dle 40, tedy (Y, ρ) je totálně omezený i úplný, proto je kompaktní.

(2) Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $f(X)$. Systém $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ je otevřené pokrytí X dle 21. Tedy z kompaktnosti (X, ρ) existují $U_1, \ldots, U_n$, že $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)$. Zřejmě $U_1 \cup \ldots \cup U_n = f(X)$, tedy $f(X)$ je kompaktní.

(3) Y je kompaktní, tedy úplný. Tedy musí být uzavřený (každá posloupnost v Y s limitou v X je cauchyovská, tedy limita je v Y).

(4) Vím, že (X_i, ρ_i) jsou úplné a totálně omezené. Jejich součin je tak úplný podle 49 a je totálně omezený dle 43. Tedy součin (X, ρ) je kompaktní.

□

Poznámka. Suma podprostorů $(X, \rho) = \sum(X_i, \rho_i)$, $i \in \mathbb{N}$, je kompaktní, právě když každý (X_i, ρ_i) je kompaktní a pouze pro konečně mnoho $i \in \mathbb{N}$ je $X_i \neq \emptyset$.

Důkaz. $\Leftarrow$ Nechť $n = |\{i \in \mathbb{N} : X_i \neq \emptyset\}|$ a bez újmy na obecnosti $X_i \neq \emptyset$, $i \leqslant n$, a $X_i = \emptyset$ pro $i > n$. Buď $A \subseteq X$ nekonečná, označme $A_i = \{x \in X_i : (x, i) \in A\}$, potom $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \times \{i\} = \bigcup_{i \leqslant n} A_i \times \{i\}$, tedy existuje $j \leqslant n$ takové, že A_j je nekonečná. Ta má z kompaktnosti X_j hromadný bod a, potom (a, j) je zřejmě hromadný bod A.

$\Rightarrow$ konečný počet neprázdných: Nechť bez újmy na obecnosti $\forall i \in \mathbb{N} : X_i \neq \emptyset$. Volme libovolně $a_i \in X_i$. Pak $\{(a_i, i) : i \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná 1-separovaná podmnožina X, tedy nemůže mít hromadný bod; spor s kompaktností.

kompaktnost (X_i, ρ_i): Buď $A \subseteq X_i$ nekonečná. Pak $A \times \{i\}$ je nekonečná, má tedy hromadný bod (a, j). Nutně $j = i$, jinak $\operatorname{dist}_\rho((a, j), A \times \{i\}) = 1$, spor. Tedy $a \in X_i$ a je to zřejmě hledaný hromadný bod A.

□

Lemma 62 (Lebesguevovo číslo)**.** *Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{U}$ je jeho otevřené pokrytí. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ existuje $U \in \mathcal{U}$, $B(x, \delta) \subseteq U$.*

Důkaz. $\mathcal{U}$ má díky kompaktnosti konečné podpokrytí $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Pokud je nějaké U_i rovno X, jsme hotovi (δ lze vzít libovolné). Předpokládejme tedy, že všechna U_i jsou vlastní podmnožiny X. Položme $C_i \coloneqq X \setminus U_i, i \leqslant n$. Definujeme $f : X \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}_\rho(x, C_i)$, f je spojitá a všude kladná. Protože X je kompaktní, funkce f na něm nabývá svého minima, které označíme δ. Nyní pro každé $x \in X$ je $f(x) \geqslant \delta$, tedy existuje $i \leqslant n$ takové, že $\operatorname{dist}_\rho(x, C_i) \geqslant \delta$, tedy $B(x, \delta) \cap C_i = \emptyset$, tedy $B(x, \delta) \subseteq U_i$, což jsme chtěli. □

Důsledek 63. *Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory, (X, ρ) kompaktní, funkce $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ spojitá. Pak f je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. $\{f^{-1}(B_\sigma(y, \frac{1}{2}\varepsilon)) : y \in Y\}$ je otevřené pokrytí X. X je kompaktní, tedy existuje Lebesguevovo číslo $\delta > 0$, že pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y : B_\rho(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_\sigma(y, \frac{1}{2}\varepsilon))$, tedy $f(B_\rho(x, \delta)) \subseteq B_\sigma(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$. Tím pádem pro $x, x' \in X$ pokud $\rho(x, x') < \delta$ je $f(\{x, x'\}) \subseteq B_\sigma(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$, ta má diametr nejvýše ε, tedy $\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$. □

Důsledek 64. *Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory, (X, ρ) kompaktní, $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ spojitá bijekce. Pak f je homeomorfismus.*

Důkaz. Zbývá ověřit, že f^{-1} je spojité. K tomu podle Věty 21 stačí ukázat, že pro každou $F \subseteq X$ uzavřenou je $(f^{-1})^{-1}(F)$ uzavřená, tj. že $f(F)$ je uzavřená. Ale F je kompaktní, takže i $f(F)$ je kompaktní, a je tedy uzavřená. □

Poznámka. Úplnost ani totální omezenost nejsou topologické pojmy, mohou se změnit přechodem k homeomorfním prostorům. Spojení obou těchto vlastností, tj. kompaktnost už ale topologický pojem je: Buďte $(X, \rho), (Y, \sigma)$ homeomorfní, pak (X, ρ) je kompaktní, právě když (Y, σ) je kompaktní (jak plyne z už dokázaného).

2.3.1 Cantorovo diskontinuum a Hilbertova kostka

Cantorova množina již byla zavedena v dřívějším příkladě. Připomeňme jednu reprezentaci

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} : a_j \in \{0, 2\} \right\},$$

tedy čísla z intervalu $[0, 1]$ neobsahující v nějakém trojkovém rozvoji číslici 1.

Uvažujme nyní dvouprvkové množiny $Y_i = \{0, 1\}$ s diskrétní metrikou ρ_i. Označme (D, ρ) jejich součin $\prod_{i=1}^{\infty}(Y_i, \rho_i)$. Ukážeme, že D je homeomorfní s C. Uvědomíme si nejprve, že prvky D jsou posloupnosti $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tvořené nulami a jedničkami. Definujeme

$$f : D \to C, \quad (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2y_i}{3^i}.$$

Zobrazení f je zřejmě na a z jednoznačnosti zápisu čísla v trojkové soustavě v uvedeném tvaru vyplývá [3], že je i prosté. f je spojitá: Volme $\varepsilon > 0$ a $y \in D$. Najděme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Platí $B_\rho(y, \frac{1}{2^n}) \subseteq \{z \in D : z_1 = y_1, \ldots, z_n = y_n\}$, jinými slovy pro $z \in D$ takové, že $\rho(z, y) < \frac{1}{2^n}$, platí $z_1 = y_1, z_2 = y_2, \ldots, z_n = y_n$, tedy

$$|f(y) - f(z)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2y_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2z_i}{3^i} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2(y_i - z_i)}{3^i} \right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

(D, ρ) je součin kompaktních prostorů, tedy je kompaktní. f je na něm definovaná spojitá bijekce, tedy dle 64 je to homeomorfismus.

Poznámka. Libovolný prostor homeomorfní s Cantorovou množinou budeme nazývat Cantorovo diskontinuum.

Hilbertova kostka je definována jako součin metrických prostorů $X_n = [0, 1], \rho_n = |\cdot|$. Značíme ji Q.

Věta 65 (Univerzální vlastnosti Cantorova diskontinua a Hilbertovy kostky)**.** *Pro každý neprázdný kompaktní metrický prostor (X, ρ) existuje spojité zobrazení $f : C \twoheadrightarrow X$, které je na. Pro každý separabilní metrický prostor (X, ρ) (speciálně, pro každý kompaktní) existuje zobrazení $g : X \to Q$ takové, že $g : X \to g(X)$ je homeomorfismus.*

Důkaz nebyl.

[3] Obecně není rozvoj reálného čísla jednoznačný, zde ale máme k dispozici pouze číslice 0 a 2, tedy situace, kdy 2 následovaná samými nulami jde nahradit jedničkou a nekonečnou posloupností dvojek ap., odpadá.

2.4 Souvislost

Definice 66. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá **nesouvislý**, pokud existují neprázdné otevřené množiny $U, V \subseteq X$ takové, že $U \cap V = \emptyset$ a zároveň $U \cup V = X$. V takovém případě někdy říkáme, že dvojice U, V svědčí o nesouvislosti X.

Prostor (X, ρ) se nazve **souvislý**, pokud není nesouvislý.

Poznámka. Souvislost je topologický pojem, tedy je-li X homeomorfní s Y, pak X je souvislý, právě když Y je souvislý.

Lemma 67. *Buď (X, ρ) metrický prostor, $Y \subseteq X$. Buďte dále $G, H \subseteq Y$ disjunktní otevřené množiny v prostoru (Y, ρ). Pak existují disjunktní množiny $U, V \subseteq X$ otevřené v (X, ρ) tak, že $G = Y \cap U$ a $H = Y \cap V$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 33 existují množiny G', H' otevřené v (X, ρ), pro něž $G' \cap Y = G$ a $H' \cap Y = H$; ty však nemusí být disjunktní. Uvažujme funkci $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, G) - \operatorname{dist}(x, H).$$

Podle Příkladu 20 jsou funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, G)$ a $x \mapsto \operatorname{dist}(x, H)$ 1-lipschitzovské na X; je snadné z definice ukázat, že funkce φ je tím pádem 2-lipschitzovská na X, a podle Faktu 19 je tedy na X spojitá. Položme

$$G'' = \varphi^{-1}((-\infty, 0)) \quad \text{a} \quad H'' = \varphi^{-1}((0, \infty)),$$

to jest

$$G'' = \{x \in X \colon \operatorname{dist}(x, G) - \operatorname{dist}(x, H) < 0\} \quad \text{a} \quad H'' = \{x \in X \colon \operatorname{dist}(x, G) - \operatorname{dist}(x, H) > 0\}.$$

Podle Věty 21 jsou množiny G'', H'' otevřené v prostoru X a zřejmě $G'' \cap H'' = \emptyset$.

Dokážeme, že $G \subseteq G''$ a $H \subseteq H''$: Skutečně, je-li $x \in G$ libovolný bod, pak $\operatorname{dist}(x, G) = 0$. Dále existuje $\delta > 0$ tak, že $B(x, \delta) \cap Y \subseteq G$, neboť G je otevřená v Y. Protože však $H \subseteq Y$ a $G \cap H = \emptyset$, je

$$B(x, \delta) \cap H = B(x, \delta) \cap (H \cap Y) = (B(x, \delta) \cap Y) \cap H \subseteq G \cap H = \emptyset.$$

Dostáváme tak $B(x, \delta) \cap H = \emptyset$, odkudž $\operatorname{dist}(x, H) \geqslant \delta > 0$, takže $\varphi(x) < 0$, tj. $x \in G''$. Inkluzi $H \subseteq H''$ lze dokázat stejně.

Celkem tedy máme: $G \subseteq G' \cap G''$, $H \subseteq H' \cap H''$, G', G'', H', H'' jsou otevřené v X, $G' \cap Y = G$, $H' \cap Y = H$ a $G'' \cap H'' = \emptyset$. Kombinací těchto faktů vidíme, že množiny

$$U := G' \cap G'' \quad \text{a} \quad V := H' \cap H''$$

splňují požadavky ze znění lemmatu, čímž je důkaz dokončen. □

Lemma 68. *Buď (X, ρ) metrický prostor a $M \subseteq X$ libovolná podmnožina. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(1) Prostor (M, ρ) je nesouvislý;

(2) Existují neprázdné množiny $U, V \subseteq X$, které jsou otevřené v X a platí $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ a $U \cup V \supseteq M$.

Důkaz. (2)⇒(1): Tato implikace je snadná, stačí totiž definovat $U' = U \cap M$, $V' = V \cap M$ a uvědomit si, že dvojice U', V' svědčí o nesouvislosti M, což okamžitě plyne z (2). Zajímavější je opačná implikace:

(1)⇒(2): Nechť dvojice (neprázdných otevřených) množin G a H svědčí o nesouvislosti M. (Pro jistotu poznamenejme, že G, H jsou tím pádem podmnožiny M, o nichž víme pouze to, že jsou otevřené v M; obecně nemusí být otevřené v X.) Podle předchozího lemmatu víme, že existují disjunktní množiny U, V otevřené v X takové, že $U \cap M = G$ a $V \cap M = H$. Je zřejmé, že tyto množiny mají všechny požadované vlastnosti, a důkaz je hotov. □

Věta 69. *Pro neprázdný metrický prostor (X, ρ) jsou následující ekvivalentní:*

(1) Prostor (X, ρ) je souvislý;

(2) X má právě dvě obojetné podmnožiny (otevřená i uzavřená);

(3) Je-li $f : X \to [0,1]$ spojitá a $\{0,1\} \subseteq f(X)$, pak f je na.

Důkaz. (1)⇒(2) X a $\emptyset$ jsou vždy obojetné podmnožiny; kdyby existovala ještě jiná obojetná $C \subsetneq X$, pak $X = C \cup (X \setminus C)$, kde obě jsou otevřené a neprázdné (a disjunktní), což by byl spor.

(2)⇒ (3) Pokud by f nebylo na, pak existuje $c \in (0,1), c \notin f(X)$, pak f je spojitá i jako funkce $X \to [0,1] \setminus \{c\}$. Pak $f^{-1}([0,c)), f^{-1}((c,1])$ jsou obojetné, různé a neprázdné (a dokonce i obě různé od X), což je spor.

(3)⇒(1) Kdyby $X = U \cup V$, kde U, V jsou otevřené, neprázdné a disjunktní, pak uvažujme $f : X \to [0,1]$, $f(x) = 0$ pro $x \in U$ a $f(x) = 1$ pro $x \in V$. Pak f je spojitá, $\{0,1\} \subseteq f(X)$ a přitom není na, spor.

□

Věta 70. *Nechť (X,ρ) je neprázdný metrický prostor a pro každé dva body $a, b \in X$ existuje souvislá $S(a,b)$, že $\{a,b\} \subseteq S(a,b)$. Pak (X,ρ) je souvislý.*

Důkaz. Kdyby nebyl souvislý, pak existují U, V neprázdné otevřené disjunktní, že $X = U \cup V$. Libovolně zvolme $a \in U, b \in V$. Pak $S(a,b) = (S(a,b) \cap U) \cup (S(a,b) \cap V)$, což je rozklad na dvě otevřené (v $S(a,b)$) neprázdné množiny. Jsou disjunktní, spor se souvislostí $S(a,b)$. □

Věta 71. *Buď (X,ρ) metrický prostor a φ soubor souvislých podmnožin X. Je-li $\bigcap \varphi$ neprázdný, pak $\bigcup \varphi$ je souvislý podprostor X.*

Důkaz. Nechť U, V jsou otevřené v X tak, že $U \cup V \supseteq \bigcup \varphi, U \cap V \cap \bigcup \varphi = \emptyset$. Fixujeme $x \in \bigcap \varphi$, bez újmy na obecnosti ať $x \in U$. Pro libovolné $y \in \bigcup \varphi$ existuje $S \in \varphi$, že $y \in S$. S je souvislá a $S \subseteq \bigcup \varphi$. Platí $U \cap V \cap S = \emptyset$ a $x \in S$, dále $S = (U \cap S) \cup (V \cap S)$ (rozklad souvislé na otevřené množiny), tedy $S \cap V = \emptyset$ a proto $S \subseteq U$. Proto $y \in U$. Celkově $\bigcup \varphi \subseteq U$, tedy $\bigcup \varphi$ je souvislá. □

Důsledek 72. *Je-li A souvislá v metrickém prostoru (X,ρ) a $A \subseteq M \subseteq \overline{A}$, pak i M je souvislá.*

Důkaz. Volme $x \in \overline{A} \setminus A$ libovolně. Ukážeme, že $A \cup \{x\}$ je souvislá. Nechť $U, V \subseteq X$ jsou otevřené takové, že $A \cup \{x\} \subseteq U \cup V, U \cap V \cap (A \cup \{x\}) = \emptyset$. Bez újmy na obecnosti ať $x \in U$. U je otevřená a $x \in \overline{A}$, tedy nutně $U \cap A \neq \emptyset$. Ovšem $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, což jsou obě otevřené v A a A je souvislá, $U \cap A, V \cap A$ jsou disjunktní, tedy $A \cap V = \emptyset$. Dále $x \notin V$, tedy i $V \cap (A \cup \{x\}) = \emptyset$. Proto i $A \cup \{x\}$ je souvislá. Potom $M = \bigcup \{A \cup \{x\} : x \in M \setminus A\}$ je souvislá podle předchozí věty. □

Věta 73. *Obraz souvislého metrického prostoru při spojitém zobrazení je souvislý.*

Důkaz. Nechť $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ je spojité a na. Testujeme souvislost pomocí první charakterizace. Ať $g : (Y,\sigma) \to [0,1]$ je spojité a $\{0,1\} \subseteq g(Y)$. Pak $g \circ f : X \to [0,1]$ je také spojité a $\{0,1\} \subseteq g(f(X))$, tedy dle charakterizace je $g \circ f$ na. Tudíž $g(Y) = [0,1]$, a Y je souvislý. □

Definice 74. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Množinu $M \subseteq X$ nazveme **oblouk**, jestliže existuje homeomorfismus $h : [0,1] \to M$. Body $h(0), h(1)$ nazveme **krajní body oblouku** M. Prostor (X,ρ) nazveme **obloukově souvislý**, jestliže $X \neq \emptyset$ a pro každé dva různé body $a, b \in X$ existuje oblouk v X s krajními body a, b.

Důsledek 75. *Každý obloukově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz. Prostor $([0,1], |\cdot|)$ je souvislý. To plyne z charakterizace souvislosti 69 a z Bolzanovy věty (1. semestr matematické analýzy). Tedy každý oblouk je souvislý. Zafixujeme $c \in X$ (X je neprázdný), X je obloukově souvislý, tedy množina O všech oblouků v X, které mají c jako svůj krajní bod, je soubor souvislých podmnožin s neprázdným průnikem. Dále $X = \bigcup O$, neboť pro každé $a \in X$ obsahuje O oblouk s krajními body c a a, tedy X je souvislý. □

Příklad (Cantorův děravý stan). Buď $X \subseteq \mathbb{R}^2$ definovaná

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(t,xt) : x \in C \cap \mathbb{Q}, t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\} \cup \{(t,xt) : x \in C \setminus \mathbb{Q}, t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\}$$

Pak X je souvislá, ale neobsahuje oblouk.[4] ▲

Definice 76. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Množinu $M \subseteq X$ nazveme **komponenta**, je-li M souvislá a žádná $M' \subseteq X, M \subsetneq M'$ není souvislá.

Poznámka. Každá komponenta prostoru X je tedy tvaru $\bigcup\{C \subseteq X : C \text{ je souvislá}, x \in C\}$ pro nějaké $x \in X$.

Příklad. Komponenty v $\mathbb{Q}$ jsou jednoprvkové množiny [uvažujme v $\mathbb{Q}$ množinu A s alespoň dvěma prvky $a, b, a < b$. Pak existuje iracionální číslo $c, a < c < b$ rozdělující ji na množiny $A^+ = \{x \in A : x > c\}, A^- = \{x \in A : x < c\}$, které jsou disjunktní, otevřené v A a $A = A^+ \cup A^-$, tedy A není souvislá.]

Komponenty $\{0,1\} \times [0,1]$ jsou dvě, $\{0\} \times [0,1]$ a $\{1\} \times [0,1]$. ▲

Věta 77. *Každá komponenta je uzavřená.*

Důkaz. Je-li M komponenta, pak je souvislá, a tedy i $\overline{M}$ je souvislá. Nutně $M = \overline{M}$, tedy M je uzavřená. □

Věta 78. *Každý bod $x \in X$ je obsažen právě v jedné komponentě.*

Důkaz. Alespoň v jedné, protože $\bigcup\{C \subseteq X : C \text{ souvislá}, x \in C\}$ je komponenta. Nejvýše v jedné, neboť pro různé komponenty $M, N, x \in M \cap N$ by byla $M \cup N$ souvislá nadmnožina, a tedy M nebo N by nebyla komponenta. □

Definice 79. Souvislý kompaktní metrický prostor se nazývá **kontinuum**.

Věta 80. *Ať $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$ je posloupnost kontinuí. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ je kontinuum.*

Důkaz. Všechna K_n jsou uzavřená v K_1, tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ je uzavřená, tedy je i kompaktní dle 61. Zbývá ukázat souvislost $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Pro spor předpokládejme, že K je nesouvislý prostor. Podle Lemmatu 68 existují otevřené $U, V \subseteq K_1$, že $U \cap V = \emptyset, K \subseteq U \cup V$ a $U \cap K \neq \emptyset, V \cap K \neq \emptyset$. Nutně existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K_n \subseteq U \cup V$. Kdyby ne, pak $\forall n \in \mathbb{N} : K_n \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$. Zřejmě je $K_n \setminus (U \cup V)$ uzavřená, tedy kompaktní a $K_{n+1} \setminus (U \cup V) \subseteq K_n \setminus (U \cup V)$, tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty}(K_n \setminus (U \cup V)) \neq \emptyset$, neboli $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$, proto $K \not\subseteq U \cup V$, spor. Pro takové $n \in \mathbb{N}$, že $K_n \subseteq U \cup V$ potom platí $K_n = (U \cap K_n) \cup (V \cap K_n)$, spor se souvislostí K_n. □

Příklad. Cvičení: $K \subseteq \mathbb{R}$ je kontinuum právě tehdy, když existují $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $K = [a,b]$. ▲

2.5 Hausdorffova metrika

Značení. Pro metrický prostor (X,ρ) označíme jako $\mathcal{K}(X)$ množinu všech neprázdných kompaktních podmnožin X.

Tedy například pokud je (X,ρ) diskrétní, pak $\mathcal{K}(X)$ sestává ze všech neprázdných konečných podmnožin.

Definice 81. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Pro $A, B \in \mathcal{K}(X)$ označme

$$\rho_H(A,B) = \max\left\{\sup\left\{\rho(x,B) : x \in A\right\}, \sup\left\{\rho(x,A) : x \in B\right\}\right\}.$$

Zobrazení $\rho_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ se nazývá **Hausdorffova metrika**.

Věta 82. *ρ_H je metrika.*

Důkaz.
- $\rho_H(A,A) = 0$ je triviální.
- pro $A \neq B$, $\rho_H(A,B) > 0$. Existuje $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, potom $\rho(x,A) > 0$ nebo $\rho(x,B) > 0$, každopádně $\rho_H(A,B) > 0$.

[4] C je Cantorova množina

- $\rho_H(A,B) = \rho_H(B,A)$ je zřejmé.
- Nechť $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$. Dokažme lemma:

  Ať $C \in \mathcal{K}(X), x, y \in X$, pak $\rho(x,C) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,C)$.

  Je-li $c \in C$, pak $\rho(x,c) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,c)$, tedy $\inf_{c\in C} \rho(x,c) \leqslant \rho(x,y) + \inf_{c\in C} \rho(y,c)$, neboli $\rho(x,C) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,C)$.

  Pro každé $a \in A, b \in B$ platí lemma výše, tedy $\rho(a,C) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,C) \leqslant \rho(a,b) + \rho_H(B,C)$, infimem přes $b \in B$ dostaneme $\rho(a,C) \leqslant \rho(a,B) + \rho_H(B,C) \leqslant \rho_H(A,B) + \rho_H(B,C)$ a z toho dále $\sup_{a\in A} \rho(a,C) \leqslant \rho_H(A,B) + \rho_H(B,C)$. Analogicky získáme $\sup_{c\in C} \rho(c,A) \leqslant \rho_H(A,B) + \rho_H(B,C)$. Dohromady dostáváme $\rho_H(A,C) = \max\{\sup_{a\in A} \rho(a,C), \sup_{c\in C} \rho(c,A)\} \leqslant \rho_H(A,B)+\rho_H(B,C)$. To dokazuje trojúhelníkovou nerovnost.

□

Tvrzení 83. *Pro každý metrický prostor (X,ρ) je zobrazení $f : (X,\rho) \to (\mathcal{K}(X), \rho_H), x \mapsto \{x\}$ izometrie na uzavřenou podmnožinu.*

Důkaz. Je vidět, že $\rho_H(\{x\},\{y\}) = \rho(x,y)$, tedy f je izometrie. Ukažme, že $M := \{\{x\} : x \in X\}$ je uzavřená v $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$. Ať $A \in \mathcal{K}(X)$ je více než jednoprvková. Tedy existují různá $x, y \in A$. Označme $r := \rho(x,y)$. Ukážeme, že $B_{\rho_H}(A, \frac{r}{3}) \cap M = \emptyset$. Tím ukážeme, že $\mathcal{K}(X) \setminus M$ je otevřená. Kdyby existovalo $\{z\} \in B_{\rho_H}(A, \frac{r}{3})$, pak $\rho(x,z) < \frac{r}{3}$ a $\rho(y,z) < \frac{r}{3}$. Tedy $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) < 2\frac{r}{3} < r = \rho(x,y)$, spor. □

Věta 84. *Pro metrický prostor (X,ρ) platí:*

(1) (X,ρ) je úplný $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ je úplný,

(2) (X,ρ) je totálně omezený $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ je totálně omezený,

(3) (X,ρ) je kompaktní $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ je kompaktní.

Důkaz.

(1)($\Leftarrow$) (X,ρ) je izometrický uzavřené podmnožině $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$, ta je úplná, tedy i (X,ρ) je úplný.

(1)($\Rightarrow$) Buď $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$. Položme $B_n = \overline{\bigcup_{k\geqslant n} A_k}$ a $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukážeme, že B je limitou posloupnosti (A_n).

Zřejmě každé $B_n \neq \emptyset$, B_n je úplná, neb je uzavřená v úplném (X,ρ). B_n je totálně omezená: Nechť $\varepsilon > 0$, najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : \rho_H(A_n, A_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. A_i jsou kompaktní, tedy pro $i \leqslant n_0$ existuje $K_i \subseteq A_i$ konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť. Potom $K_1 \cup \ldots \cup K_{n_0}$ je konečná ε-síť v B_n Tedy B_n je jak totálně omezená, tak úplná, tedy kompaktní. Potom B je také kompaktní, navíc neprázdná, neboť $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ a $B_i \neq \emptyset$. Tedy $B \in \mathcal{K}(X)$. Ukážeme, že $A_n \longrightarrow B$, tedy $\lim_n \rho_H(A_n, B) = 0$. K tomu stačí dokázat $\rho_H(A_n, B_n) \longrightarrow 0$ a $\rho_H(B_n, B) \longrightarrow 0$.

- $\rho_H(A_n, B_n) \longrightarrow 0$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje z cauchyovskosti $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $m, n \geqslant n_0$ je $\rho_H(A_n, A_m) < \varepsilon$. Platí $A_n \subseteq B_n$, tedy $\rho_H(A_n, B_n) = \rho_H(A_n, \overline{\bigcup_{k\geqslant n} A_k}) \leqslant \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$.
- $\rho_H(B_n, B) \longrightarrow 0$. Víme, že B_n jsou postupně vnořené a $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Nechť $\varepsilon > 0$, položme $U = \{x \in X : \rho(x,B) < \varepsilon\}$. Ukážeme, že existuje n_0, že $B_{n_0} \subseteq U$. Proto $\rho_H(B_n, B) \leqslant \varepsilon$ pro $n \geqslant n_0$.

  Označme $s_n := \sup_{x\in B_n} \rho(x,B)$. Potom posloupnost (s_n) je nerostoucí [pro $n < m$ je $B_m \subseteq B_n$, tedy pro $x \in B_m$ je také $\rho(x,B) \leqslant s_n$, vezmeme supremum přes $x \in B_m$ a máme $s_m \leqslant s_n$], dále je zdola omezená 0, tedy má limitu $l := \lim_n s_n \geqslant 0$. Uvažujme konvergentní posloupnost (x_n), kde pro každé n je $x_n \in B_n$. Potom pro její limitu x platí z uzavřenosti B_n, že $x \in B_n$ pro každé n, a proto $x \in B$. Nyní sestrojme posloupnost (x_n), že $x_n \in B_n$ a $\rho(x_n, B) \geqslant \frac{1}{2}s_n$. To lze vždy vybrat, buď $s_n = 0$ a vezmeme $x_n \in B$, nebo $s_n > \frac{1}{2}s_n$ je definováno jako supremum, tedy hledané x_n existuje. Nyní B_1 je kompaktní, tedy z posloupnosti v ní lze vybrat konvergentní $(x_{n_k}) \longrightarrow x$. Platí $x \in B$ [opakováním členů doplníme tak, že $x'_n \in B_n$, ta má stejnou limitu a využijeme předchozí pozorování]. Můžeme tak srovnat $\lim \rho(x_{n_k}, B) = \rho(x,B) = 0 \geqslant \lim \frac{1}{2}s_{n_k} = \frac{1}{2}l$, tedy nutně $l = 0$. Potom pro ε lze najít n_0 že $s_{n_0} < \varepsilon$, tedy $B_{n_0} \subseteq U$.

(2)($\Rightarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, jelikož je X totálně omezený, nalezneme konečnou ε-síť A_0. Označme $A = \mathcal{P}(A_0) \setminus \{\emptyset\}$, to je konečná množina a ukážeme, že je to ε-síť pro $\mathcal{K}(X)$. Pro $B \in \mathcal{K}(X)$ označme $S = \{x \in A_0 : \exists b \in B : \rho(b,x) < \varepsilon\}$. Jistě $S \in A$ a S je neprázdná, neboť $B \neq \emptyset$ a A_0 je ε-síť. Chceme $\rho_H(S,B) \leqslant \varepsilon$. Pro $x \in S$ z definice existuje $b \in B$, že $\rho(x,b) < \varepsilon$, tedy $\rho(x,B) \leqslant \rho(x,b) < \varepsilon$, tedy platí $\sup_{x\in S} \rho(x,B) < \varepsilon$. Pro $b \in B$ existuje $x \in A_0$, že platí $\rho(x,b) < \varepsilon$, tedy platí $x \in S$, proto $\rho(b,S) \leqslant \rho(b,x) < \varepsilon$, potom i $\sup_{b\in B} \rho(b,S) \leqslant \varepsilon$. Tedy platí $\rho_H(S,B) \leqslant \varepsilon$. Pro libovolné $B \in \mathcal{K}(X)$ jsme našli $S \in A$, že $\rho_H(S,B) \leqslant \varepsilon$, tedy A je ε-síť.

(2)($\Leftarrow$) Pro $x \in X$ je $\{x\}$ kompaktní, tedy $\{x\} \in \mathcal{K}(X)$. Nechť E je ε-separovaná v X. Jelikož $\rho_H(\{x\},\{y\}) = \rho(x,y)$, je i množina $F = \{\{x\} : x \in E\}$ ε-separovaná v $\mathcal{K}(X)$. Tím pádem je konečná a jelikož $|F| = |E|$, je E konečná. Tedy X je totálně omezený.

(3) Okamžitě plyne z předchozích dvou ekvivalencí.

□

3 Iterované funkční systémy

Definice 85. Nechť $(X,\rho),(Y,\sigma)$ jsou metrické prostory, zobrazení $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ nazveme **kontrakce**, jestliže existuje $K < 1$ takové, že $\forall x,y \in X : \sigma(f(x),f(y)) \leqslant K\rho(x,y)$.

Věta 86 (Banachova věta o pevném bodě)**.** *Nechť (X,ρ) je neprázdný úplný metrický prostor, $f : X \to X$ kontrakce. Pak zobrazení f má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Volme $x_0 \in X$ libovolně. Označme $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots x_{n+1} = f(x_n)$. Posloupnost (x_n) je cauchyovská, neboť $\rho(x_{n+1},x_n) \leqslant K\rho(x_n,x_{n-1}) \leqslant \dots \leqslant K^n\rho(x_1,x_0)$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} K^n\rho(x_1,x_0)$ konverguje, tedy pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{n=n_0}^{\infty} K^n\rho(x_0,x_1) < \varepsilon$, tedy pro $m \geqslant n \geqslant n_0$ $\rho(x_m,x_n) \leqslant \rho(x_m,x_{m-1}) + \dots + \rho(x_{n+1},x_n) \leqslant \sum_{i=n}^{m} K^i\rho(x_1,x_0) \leqslant \sum_{i=n_0}^{\infty} K^i\rho(x_0,x_1) < \varepsilon$. Tedy existuje limita $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Když využijeme, že kontrakce je nutně spojitá, je $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_n = x$. Pro pevné body $x,y \in X$ by bylo $\rho(x,y) = \rho(f(x),f(y)) \leqslant K\rho(x,y)$, což pro $K < 1$ splňuje jen $\rho(x,y) = 0$, proto jednoznačnost. □

Definice 87. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, nechť $f_1,\dots,f_n : X \to X$ jsou kontrakce, $n \in \mathbb{N}$. Pak systém $\{f_1,\dots,f_n\}$ se nazývá **iterovaný funkční systém na** X (IFS). Množina $K \subseteq X$ se nazývá invariantní, pokud $K = f_1(K) \cup \ldots \cup f_n(K)$.

Příklad. $X = [0,1], f_1(x) = \frac{1}{2}x, f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$. Pak $\{f_1,f_2\}$ je IFS a $[0,1]$ je invariantní. ▲

Věta 88. *Nechť (X,ρ) je neprázdný úplný metrický prostor, $\{f_1,\dots,f_n\}$ IFS. Pak existuje jediná kompaktní neprázdná invariantní množina $K \subseteq X$.*

Důkaz. Ať $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ je definováno jako $F(L) = f_1(L) \cup \ldots \cup f_n(L), L \in \mathcal{K}(X)$. To je dobře definované zobrazení a lze ověřit, že je to kontrakce prostoru $(\mathcal{K}(X),\rho_H)$. (X,ρ) je úplný, tedy i $(\mathcal{K}(X),\rho_H)$ je úplný. Podle Banachovy věty má jediný pevný bod $K \in \mathcal{K}(X)$, to je tedy invariantní podmnožina v $\mathcal{K}(X)$. □

Příklad. $X = [0,1], f_1 = \frac{1}{3}x, f_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$. $\{f_1,f_2\}$ je IFS a jediná invariantní množina v $\mathcal{K}([0,1])$ je Cantorova množina. ▲

Příklad. $X = \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y), f_2(x,y) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y), f_3(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y)$. Jediná invariantní pro IFS $\{f_1,f_2,f_3\}$ je Sierpinského trojúhelník. ▲

Poznámka. Uvědomte si, že podle důkazu Banachovy věty lze invariantní množinu IFS hledat tak, že vybereme libovolně $L \in \mathcal{K}(X)$ (třeba jednoprvkové) a daný IFS iterujeme, tj. na L postupně aplikujeme zobrazení F. Tím získáváme lepší a lepší představu o invariantní množině. Lze si rozmyslet pro Sierpinského $\triangle$ a $L = \{(0,0)\}$.

Poděkování Text vznikl za podpory Studentského fakultního grantu „Metrické prostory - poznámky z přednášky".