Konvexní tělesa
LS 2020/21

1 Úvod, kombinatorické věty

Naším základním prostorem bude po většinu času prostor $\mathbb{R}^d$ se standardním skalárním součinem a normou. Některé pojmy a věty lze formulovat obecněji v *afinním prostoru* $\mathcal{A}_d$ dimenze d; vystačíme zde s představou afinního podprostoru prostoru $\mathbb{R}^D$ s $D > d$.

V prostoru $\mathcal{A}_d$ (či speciálně $\mathbb{R}^d$) je bod $x \in \mathcal{A}_d$ *afinní kombinací* bodů $x_0, \dots, x_k$ s koeficienty $t_0, \dots, t_k$, pokud $t_0 + \dots + t_k = 1$ ($t_i \in \mathbb{R}$) a $x = t_0 x_0 + \dots + t_k x_k$. Pro podmnožinu $A \subset \mathcal{A}_d$ definujeme její *afinní obal* $\operatorname{aff} A$ jako nejmenší afinní podprostor $\mathcal{A}_d$ obsahující A, přitom $\operatorname{aff} A$ splývá s množinu všech afinních kombinací bodů z A.

Řekneme, že body $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{A}_d$ jsou *afinně nezávislé*, jestliže vektory $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 1.1.

1. $K \subset \mathcal{A}_d$ je *konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $(1-t)x + ty \in K$.
2. *Konvexní obal* množiny $A \subset \mathcal{A}_d$ je množina
$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{B \subset V_d : \ B \supset A : B \text{ konvexní}\}.$$
3. *Dimenzí* konvexní množiny $K \subset \mathcal{A}_d$ rozumíme dimenzi jejího konvexního obalu, tedy $\dim K := \dim(\operatorname{aff} K)$.
4. Množinu $\operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_k\}$, kde $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{A}_d$ jsou afinně nezávislé, nazýváme *k-simplexem*.
5. *Konvexní těleso* v $\mathbb{R}^d$ je neprázdná, konvexní a kompaktní množina.

Poznámka 1.1. Zřejmě $K \subset \mathcal{A}_d$ je konvexní právě tehdy, když

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1, \dots, x_n \in K)(\forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]), \sum_{i=1}^n t_i = 1 \implies \sum_{i=1}^n t_i x_i \in K.$$

Lemma 1.1. *Mějme systém konvexních množin $K_\alpha \subset \mathcal{A}_d$, $\alpha \in I$. Pak*

1. *$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ je rovněž konvexní,*

2. *je-li indexová množina I lineárně uspořádaná a systém (K_α) rostoucí (tzn. $K_\alpha \subset K_{\alpha'}$ kdykoliv $\alpha < \alpha'$), pak i $\bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$ je konvexní.*

Důkaz. Plyne snadno z definice. □

Lemma 1.2. *Pro libovolnou $A \subset \mathcal{A}_d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i x_i : \, t_i \geq 0, t_1 + \cdots + t_k = 1, x_i \in A, i = 1, \ldots, k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Označme $\tilde{A}$ množinu na pravé straně dokazované rovnosti. Snadno se dokáže, že $\tilde{A}$ je konvexní, a navíc obsahuje A, tedy $\operatorname{conv} A \subset \tilde{A}$.

Pro důkaz opačné inkluze uvažujme nějakou konvexní nadmnožinu $K \supset A$. Pak podle Poznámky 1.1 K obsahuje i $\tilde{A}$. Platí tedy $\tilde{A} \subset \operatorname{conv} A$. □

Definice 1.2. *Uzavřený konvexní obal* množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme jako

$$\overline{\operatorname{conv}} A := \bigcap \{ B \subset \mathbb{R}^d : \, B \supset A, B \text{ konvexní uzavřená} \}.$$

Poznámka 1.2.

1. Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ platí $\overline{\operatorname{conv}} A = \overline{\operatorname{conv} A}$. (Cvičení.)

2. Z uzavřenosti A neplyne uzavřenost $\operatorname{conv} A$. (Uvažujte sjednocení přímky a bodu.)

3. Je-li A kompaktní, pak je i $\operatorname{conv} A$ kompaktní. (Cvičení.)

Věta 1.3 (Caratheodory)**.** *Pro libovolnou množinu $A \subset \mathcal{A}_d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=0}^{d} t_i x_i : \, t_i \geq 0, t_0 + \cdots + t_d = 1, x_i \in A, i = 0, \ldots, d \right\}.$$

Poznámka 1.3.

1. Ekvivalentně lze říci, že konvexní obal množiny A v $\mathcal{A}_d$ je sjednocením všech k-simplexů s vrcholy v A, $k \leq d$.

2. Počet $d + 1$ členů v konvexní kombinaci nelze obecně snížit (uvažujte d-simplex).

Důkaz. Označme symbolem $\tilde{A}$ množinu na pravé straně dokazované rovnosti. Zřejmě platí $\tilde{A} \subset \operatorname{conv} A$ (viz Lemma 1.2).

Dokážeme opačnou inkluzi. Buď $x \in \operatorname{conv} A$, podle Lemmatu 1.2 lze tedy x psát ve tvaru $x = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_k x_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 1$, $x_i \in A$. Předpokládejme, že k je nejmenší přirozené číslo, pro něž lze takové vyjádření nalézt. Stačí ukázat, že $k \leq d$. Nechť pro spor $k > d$. Zřejmě $\alpha_i > 0$ pro všechna i (členy s $\alpha_i = 0$ lze vynechat a snížit tak číslo k).

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$t_0 x_0 + \cdots + t_k x_k = 0, \quad t_0 + \cdots + t_k = 0.$$

Jedná se o soustavu $d + 1$ rovnic (po rozpisu do souřadnic) pro $k + 1$ proměnných. Protože $k > d$, existuje netriviální řešení $(t_0, \ldots, t_k)$. Zřejmě $\min_i t_i < 0 < \max_i t_i$. Položme

$$\tau := \min \left\{ \frac{\alpha_i}{t_i} : t_i > 0 \right\} =: \frac{\alpha_{i_0}}{t_{i_0}} > 0$$

a

$$\beta_i := \alpha_i - \tau t_i, \quad i = 0, \ldots, k.$$

Zřejmě $0 = \beta_{i_0} \leq \beta_i$, $i = 0, \ldots, k$. Dále platí

$$\sum_{i=0}^{k} \beta_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - \tau \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,$$
$$\sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i - \tau \sum_{i=0}^{k} t_i x_i = x.$$

Tedy x lze vyjádřit jako konvexní kombinaci méně než $k + 1$ prvků, což je spor s předpokladem minimality k a důkaz druhé inkluze je tím hotov. □

Věta 1.4 (Radon)**.** *Nechť množina $A \subset \mathcal{A}_d$ má aspoň $d + 2$ prvků. Pak existují disjunktní podmnožiny $R, B \subset A$ takové, že* $\operatorname{conv} R \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$.

Poznámka 1.4. Hodnota $d + 2$ ve větě nemůže být snížena (uvažujte d-simplex).

Důkaz. Stačí uvažovat konečnou množinu $A = \{x_0, \ldots, x_k\}$, $k > d$. Stejně jako v důkazu Caratheodoryho věty uvažjme soustavu $d+1$ lineárních rovnic o $k + 1$ proměnných

$$t_0 x_0 + \cdots + t_k x_k = 0, \quad t_0 + \cdots + t_k = 0,$$

a buď $(t_0, \dots, t_k)$ její netriviální řešení. Označme

$$I := \{i : t_i > 0\}, \quad J := \{j : t_j < 0\},$$
$$R := \{x_i : i \in I\}, \quad B := \{x_j : j \in J\}.$$

Pak platí

$$x = \sum_{i \in I} \frac{t_i}{\sum_{i \in I} t_i} x_i = \sum_{j \in J} \frac{t_j}{\sum_{j \in J} t_j} x_j,$$

tedy $x \in \operatorname{conv} R \cap \operatorname{conv} B$. □

Věta 1.5 (Helly). *Buďte $K_0, \dots, K_m \subset \mathcal{A}_d$ konvexní, $m \geq d$. Nechť pro libovolné $0 \leq i_0 < \dots < i_d \leq m$ je $K_{i_0} \cap \dots \cap K_{i_d} \neq \emptyset$. Pak $K_0 \cap \dots \cap K_m \neq \emptyset$.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle m Pro $m = d$ je tvrzení triviální. Buď $m > d$ dané a předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$. Tedy pro každé $0 \leq i \leq m$ existuje bod $p_i \in \bigcap_{j \neq i} K_j$. Pokud $p_i = p_k$ pro nějaké dva různé indexy i, k, pak bod $p_i = p_k$ leží v $\bigcap_{j=0}^m K_j$ a jsme hotovi. Nechť tedy naopak všechny body p_i jsou různé. Pak podle Radonovy věty existuje rozklad $\{0, \dots, m\} = I \cup J$ na disjunktní množiny I, J tak, že $\operatorname{conv}\{p_i : i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{p_j : j \in J\} \neq \emptyset$. Buď p bod tohoto průniku. Protože $p_i \in \bigcap_{j \in J} K_j$ pro všechna $i \in I$ a množiny K_j (a tedy i jejich průnik) jsou konvexní, také $p \in \bigcap_{j \in J} K_j$. Analogickou úvahou zjistíme, že také $p \in \bigcap_{i \in I} K_i$, a tedy $p \in \bigcap_{i=0}^m K_i$. □

Důsledek 1.6. *Buď $\{K_i : i \in I\}$ systém kompaktních konvexních podmnožin $\mathbb{R}^d$. Nechť pro všechny $i_0, \dots, i_d \in I$ platí $K_{i_0} \cap \dots \cap K_{i_d} \neq \emptyset$. Pak $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.*

Důkaz. Podle Hellyho věty je $\bigcap_{i \in F} K_i \neq \emptyset$ pro každou konečnou množinu $F \subset I$. Neprázdnost průniku všech K_i je pak přímým důsledkem kompaktnosti: Vskutku, kdyby $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$, pak pro libovolné $i_0 \in I$ je

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^d \setminus K_i)$$

otevřené pokrytí, tedy existuje konečná $F \subset I$ taková, že $K_{i_0} \subset \bigcup_{i \in F} (\mathbb{R}^d \setminus K_i)$. Pak ale $K_{i_0} \cap \bigcap_{i \in F} K_i = \emptyset$, což je spor. □

Důsledek 1.7. *Buďte $A_0, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, $k \leq d + 1$ a L lineární podprostor $\mathbb{R}^d$ dimenze $d - k + 1$. Nechť každých k množin A_i má neprázdný průnik. Pak existuje $z \in \mathbb{R}^d$ takový, že $(L + z) \cap A_i \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, m$.*

Důkaz. Předně si uvědomme, že $(L+z)\cap A_i \neq \emptyset$ právě tehdy, když

$$z \in A_i \oplus L := \{a+b:\ a \in A_i,\ b \in L\}.$$

Stačí tedy dokázat, že $\bigcap_{i=0}^m (A_i \oplus L) \neq \emptyset$. Dále využijeme rovnosti

$$\bigcap_{i=0}^m (A_i \oplus L) = \bigcap_{i=0}^m (\tilde{A}_i \oplus L) = \left(\bigcap_{i=0}^m \tilde{A}_i\right) \oplus L,$$

kde $\tilde{A}_i$ je kolmá projekce množiny A_i do podprostoru $L^\perp$ kolmého k L. Nyní použijeme Hellyho větu v afinním prostoru $L^\perp$ dimenze $k-1$. Protože podle předpokladu má každých k množin z $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_m$ neprázdný průnik, je i $\tilde{A}_0 \cap \dots \cap \tilde{A}_m \neq \emptyset$. □

Důsledek 1.8 (Barycentrum míry)**.** *Pro každou borelovskou pravděpodobnostní míru μ na $\mathbb{R}^d$ existuje $y \in \mathbb{R}^d$ takový, že pro každý uzavřený poloprostor $H \subset \mathbb{R}^d$ je $\mu(H) \geq \frac{1}{d+1}$.*

Poznámka 1.5. Konstantu $\frac{1}{d+1}$ nelze zlepšit: uvažujte $\mu = \frac{1}{d+1}\delta_{x_0} + \dots + \frac{1}{d+1}\delta_{x_d}$ pro afinně nezávislé body $x_0, \dots, x_d \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz. Označme

$$\mathcal{S} := \left\{ H \subset \mathbb{R}^d \text{ uzavř. poloprostor}, \mu(\mathbb{R}^d \setminus H) < \frac{1}{d+1}. \right\}.$$

Pro libovolné $H_0, \dots, H_d \in \mathcal{S}$ platí (ze subaditivity míry) $\mu(\bigcup_{i=0}^d (\mathbb{R}^d \setminus H_i)) < 1$, tedy $\bigcap_{i=0}^d H_i \neq \emptyset$. Podle Hellyho věty má tedy každý konečný neprázdný podsystém $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ neprázdný průnik. Ukážeme, že i $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Zřejmě existuje konečně mnoho uzavřených podprostorů $H_1, \dots, H_m$ takových, že jejich průnik je omezená množina. Zvětšíme-li H_i posunem hraniční nadroviny, najdeme podprostor $H_i' \supset H_i$, $H_i' \in \mathcal{S}$, přitom průnik $B := H_1' \cap \dots \cap H_m'$ zůstane omezený, a tedy i kompaktní. Pak $\{B \cap H :\ H \in \mathcal{S}\}$ je systém kompaktních konvexních množin, v němž má každý konečný podsystém neprázdný průnik. Tedy i $\bigcap_{H \in \mathcal{S}} (B \cap H) = \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H \neq \emptyset$.

Vyberme bod $y \in \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H$. Je-li G otevřený poloprostor obsahující y, pak $\mathbb{R}^d \setminus G \notin \mathcal{S}$, a tedy $\mu(G) \geq \frac{1}{d+1}$. Je-li nyní H libovolný uzavřený poloprostor obsahující bod y, pak existují otevřené poloprostory $G_i \searrow H$, $y \in G_i$. Protože $\mu(G_i) \geq \frac{1}{d+1}$ pro každé i, také $\mu(F) \geq \frac{1}{d+1}$ ze spojitosti míry. □

Věta 1.9. *Pro každou neprázdnou kompaktní množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \int x \, d\mu(x) : \mu \text{ borel. pravděp. míra}, \mu(A) = 1 \right\}.$$

Důkaz. (a) Je-li μ konečná kombinace Dirakových měr, $\mu = \alpha_1 \delta_{x_1} + \cdots + \alpha_k \delta_{x_k}$ (nutně $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$), pak

$$\int x \, d\mu(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in \operatorname{conv} A.$$

Je tedy $\operatorname{conv} A \subset \tilde{A}$, kde $\tilde{A}$ je množina na pravé straně dokazované identity.

(b) K libovolné borelovské pravděpodobnostní míře μ na A najdeme posloupnost μ_n konečných kombinací Diracových měr takovou, že $\int x \, d\mu_n(x) \to \int x \, d\mu(x)$, $n \to \infty$. Tím bude dokázána druhá inkluze, protože $\operatorname{conv} A$ je uzavřená. Nechť C_0 je kvádr obsahující A a pro $n \in N$ zvolme rozklad $C = C_{n,1} \cup \cdots \cup C_{n,k_n}$ takový, že $\operatorname{diam} C_{n,j} \leq \frac{1}{n}$, $j = 1, \ldots, k_n$. Zvolme body $p_{n,j} \in C_{n,j}$ a položme

$$\mu_n = \mu(C_{n,1}) \delta_{p_{n,1}} + \cdots + \mu(C_{n,k_n}) \delta_{p_{n,k_n}}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \left\| \int x \, d\mu_n(x) - \int x \, d\mu(x) \right\| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \mu(C_{n,j}) p_{n,j} - \int_{C_{n,j}} x \, d\mu(x) \right\| \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \int_{C_{n,j}} (p_{n,j} - x) \, d\mu(x) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mu(C_{n,j}) = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. □

Důsledek 1.10. *Pro libovolné $k, d \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ a $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^d$ tak, že*

$$\|x\|^{2k} = \sum_{i=0}^{m} \langle c_i \cdot x \rangle^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Důkaz. Označme $H_{2k,d}$ vektorový prostor všech homogenních polynomů stupně $2k$ v d reálných proměnných $(x_1, \ldots, x_d)$. Prvek $h \in H_{2k,d}$ je tvaru

$$h(x) = h(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i_1 + \cdots + i_d = 2k} a_{i_1, \ldots, i_d} x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d}.$$

$H_{2k,d}$ je vektorový prostor dimenze $\binom{d+2k-1}{2k}$ (počet $(2k)$-prvkových kombinací s opakováním z d prvků). Pro libovolný $c \in S^{d-1} := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| = 1\}$ označme $h_c(x) := \langle c, x\rangle^{2k}$; zřejmě $h_c \in H_{2k,d}$. Dále buď $K := \{h_c : c \in S^{d-1}\}$ (uzavřená podmnožina $H_{2k,d}$), μ rotačně invariantní pravděpodobnostní míra na S^{d-1} a

$$h := \int h_c \, d\mu(c) \in \operatorname{conv} K.$$

Protože h je rotačně invariantní polynom stupně $2k$, musí být tvaru

$$h(x) = \gamma\|x\|^{2k}$$

pro nějaké $\gamma > 0$. Podle Caratheodoryho věty pak je pro $m = \binom{d+2k-1}{2k} + 1$

$$h = \alpha_0 h_{c_0} + \cdots + \alpha_m h_{c_m}$$

pro vhodné $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_m = 1$ a $c_i \in S^{d-1}$. Je tedy

$$\gamma\|x\|^{2k} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \langle c_i, x\rangle^{2k},$$

což je ekvivalentní dokazovanému vztahu.

$\square$

Důsledek 1.11 (O aproximaci). *Buďte $f_i, g : T \to \mathbb{R}$ funkce na konečné množině T, $i = 1, \ldots, m$, a $\varepsilon > 0$. Pro $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ označme $f_x := x^1 f_1 + \cdots + x^m f_m$. Nechť pro libovolné $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T$ existuje $x \in \mathbb{R}^m$ tak, že $|f_x(t_i) - g(t_i)| \leq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m+1$. Pak existuje $y \in \mathbb{R}^m$ takový, že $\sup_{t \in T} |f_y(t) - g(t)| \leq \varepsilon$.*

2 Opěrné a oddělovací věty

Věta 2.1. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní a uzavřená. Pak ke každému bodu $y \in \mathbb{R}^d$ existuje právě jeden bod $\Pi_A(y) \in A$ splňující*

$$\|\Pi_A(y) - y\| = \operatorname{dist}(y, A) := \inf_{x \in A} \|y - x\|.$$

Zobrazení $y \mapsto \Pi_A(y)$ se nazývá *metrická projekce* na A.

Důkaz. Je-li $y \in A$, pak samozřejmě $\Pi_A(y) = y$. Nechť $y \notin A$ a zvolme pevně nějaké $R > \operatorname{dist}(y, A)$. . Protože zobrazení $x \mapsto \|y - x\|$ je spojité, nabývá svého minima na kompaktní množině $A \cap B(y, R)$. Ukážeme, že bod minima je jediný.

Nechť pro spor existují dva body $x_1 \neq x_2$ z množiny A takové, že $\|x_1 - y\| = \|x_2 - y\| = \operatorname{dist}(y, A)$. Bod $x := \frac{x_1+x_2}{2}$ leží také v konvexní množině A, přitom ale $\|x - y\| < \|x_1 - y\| = \operatorname{dist}(y, A)$ (výška v rovnoramenném trojúhelníku je kratší než odvěsny), což je spor. $\square$

Definice 2.1. Jsou-li $A \subset \mathbb{R}^d$ konvexní uzavřená a H uzavřený poloprostor $\mathbb{R}^d$ s hraniční nadrovinou $E := \partial H$ takové, že $A \subset H$ a $A \cap E \neq \emptyset$, říkáme, že:

1. E je *opěrná nadrovina* množiny A,
2. H je *opěrný poloprostor* množiny A,
3. $E \cap A$ je *opěrná množina* množiny A.

Poznámka 2.1. *Opěrná množina je zřejmě konvexní množina dimenze menší než d.*

Věta 2.2. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená a $y \in \mathbb{R}^d \setminus A$. Pak nadrovina E procházející bodem $\Pi_A(y)$ a kolmá k $y - \Pi_A(y)$ je opěrnou nadrovinou A, a poloprostor s hranicí E a neobsahující bod y je opěrným poloprostorem A.*

Důkaz. Zřejmě $a := \Pi_A(y) \in A \cap E \neq \emptyset$, stačí tedy ukázat, že $A \subset H$. Nechť pro spor existuje bod $x \in A \setminus H$. Pak úhel $\angle(yax) < \frac{\pi}{2}$. Pokud $\angle(yxa) \geq \frac{\pi}{2}$, položme $z := x$, v opačném případě zvolme za z kolmou projekci bodu y na polopřímku $\{a + tx : t > 0\}$. Vzhledem ke konvexitě je $z \in A$. V trojúhelníku s vrcholy y, a, z je pak v obou případech $\sin \angle(yaz) < \sin \angle(yza)$, tedy $\|y - z\| < \|y - a\|$ podle sinové věty. To je ale spor s vlastností $a = \Pi_A(y)$. $\square$

Důsledek 2.3. *Každá neprázdná konvexní uzavřená vlastní podmnožina $A \subset \mathbb{R}^d$ je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují. Zároveň A je průnikem všech svých opěrných poloprostorů.*

Lemma 2.4. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená. Pak*

$$\|\Pi_A(y) - \Pi_A(x)\| \leq \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(Jinými slovy, metrická projekce je 1-Lipschitzovská.)

Důkaz. Označme $a := \Pi_A(x)$ a $b := \Pi_A(y)$. Je-li $a = b$, nerovnost zřejmě platí. Nechť tedy $a \neq b$ a označme ϕ kolmou projekci z $\mathbb{R}^d$ na přímku procházející body a, b. Bod x ani y nemůže ležet ve "vrstvě" $S := \phi^{-1}((a, b))$ (kdyby například $x \in S$, pak by bod $\phi(x) \in (a, b) \subset A$ ležel blíže od x

než $a = \Pi_A(x)$, což by byl spor). Úsečka $[x, y]$ tedy protíná obě rovnoběžné nadroviny $\phi^{-1}(a)$ a $\phi^{-1}(b)$ ležící ve vzdálenosti $\|b-a\|$, tedy nutně $\|x-y\| \geq \|b-a\|$. $\square$

Věta 2.5 (Support Theorem)**.** *Každým hraničním bodem neprázdné konvexní uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^d$ prochází opěrná nadrovina.*

Důkaz. Zvolme $a \in \partial A$ a posloupnost bodů $x_k \in \mathbb{R}^d \setminus A$, $x_k \to a$. Označme $a_k := \Pi_A(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Podle předchozího lemmatu je

$$\|a - a_k\| = \|\Pi_A(x_k) - \Pi_A(a)\| \leq \|x_k - a\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Položme $y_k := a_k + \frac{x_k - a_k}{\|x_k - a_k\|}$. Z Věty 2.2 plyne, že $\Pi_A(y_k) = \Pi_A(x_k) = a_k$ (nadrovina procházející bodem a_k a kolmá k $[x_k, a_k]$ je opěrná). Posloupnost (y_k) je zřejmě omezená, tedy má konvergentní podposloupnost $y_{k_n} \to y$. Dále platí $\operatorname{dist}(y, A) = \lim_k \operatorname{dist}(y_{n_k}, A) = 1$, tedy $y \notin A$. Ze spojitosti metrické projekce plyne $a_{n_k} = \Pi_A(y_{n_k}) \to \Pi_A(y)$, zároveň ale $a_{n_k} \to a$, tedy $a = \Pi_A(y)$. Pak ovšem bodem a prochází opěrná madrovina podle Věty 2.2. $\square$

Věta 2.6 (Separation Theorem)**.** *Buďte $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní uzavřená a $K \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní a kompaktní, $A \cap K = \emptyset$. Pak existuje nadrovina E ostře oddělující A od K (tzn., že A a K jsou obsaženy v opačných otevřených poloprostorech s hranicí E).*

Důkaz. Množina $A - K := \{a - b : a \in A, b \in K\}$ je neprázdná, konvexní a uzavřená a neobsahuje počátek. Podle Věty 2.2 tedy existuje nadrovina E ostře oddělující $A - K$ od 0. Nechť $E = \{x : \langle x, u \rangle = \alpha\}$ pro nějaký jednotkový vektor u a $\alpha > 0$, tedy pro všechna $a \in A$ a $b \in K$ platí $\langle a - b, u \rangle > \alpha$. Protože K je kompaktní, existuje

$$\beta := \langle b_0, u \rangle = \max_{b \in K} \langle b, u \rangle.$$

Pak pro všechna $a \in A$ je

$$\langle a, u \rangle > \alpha + \langle b_0, u \rangle = \alpha + \beta.$$

Například nadrovina $\{x : \langle x, u \rangle = \frac{\alpha}{2} + \beta\}$ tedy ostře oddělue množiny A a K. $\square$

Definice 2.2. Množina $P \subset \mathbb{R}^d$ je *polytop*, lze-li P zapsat jako konvexní obal konečné množiny bodů. Je-li $P = \operatorname{conv} F$, F konečná, řekneme, že bod $v \in F$ je *vrcholem* P, jestliže $v \notin \operatorname{conv}(F \setminus \{v\})$. Každou opěrnou množinu polytopu P nazveme *stěnou* P.

Poznámka 2.2. Lze snadno ukázat, že definice vrcholu polytopu nezávisí na volbě generující konečné množiny. Dále je vidět, že stěny dimenze 0 jsou tvořeny právě vrcholy polytopu.

Lemma 2.7. *Nechť je dán polytop* $P = \operatorname{conv} V$ *s (konečnou) množinou vrcholů* V *a nechť* F *je stěna* P. *Pak* $F = \operatorname{conv}(V \cap F)$.

Důkaz. Nechť $P \subset \{x : \langle x, u\rangle \leq \alpha\}$ a $F = P \cap \{x : \langle x, u\rangle = \alpha\}$ pro vhodné $u \in S^{d-1}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Inkluze $\operatorname{conv}(V \cap F) \subset F$ je zřejmá. Nechť je dán bod $x \in F$. Protože $x \in P$, můžeme psát $x = \sum_{v \in V} \alpha(v) v \in P$ s koeficienty $\alpha(v) \geq 0$, $\sum_{v\in V} \alpha(v) = 1$. Jelikož $x \in F$, platí

$$\alpha = \langle x, u\rangle = \sum_{v\in V} \alpha(v)\langle v, u\rangle = \sum_{v\in V\cap F} \alpha(v)\langle v, u\rangle + \sum_{v\in V\setminus F} \alpha(v)\langle v, u\rangle.$$

Protože $\langle v, u\rangle < \alpha$ kdykoliv $v \notin F$, musí být příslušné kouficienty $\alpha(v) = 0$, a tedy $x = \sum_{v\in V\cap F} \alpha(v) v \in P$. □

Definice 2.3. $P \subset \mathbb{R}^d$ je *mnohostěn* (polyhedron), lze-li P zapsat jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů.

Věta 2.8. *Každý polytop je omezený polyhedron.*

Důkaz. Buď $P = \operatorname{conv} V$ polytop s množinou vrcholů V. Předpokládejme nejprve, že $\dim P = d$, tedy P má vnitřní bod y. Podle předchozího Lemmatu 2.7 má P konečný počet stěn $F_1, \ldots, F_k$. K těmto stěnám existují opěrné polorostory $H_1, \ldots, H_k$ takové, že $F_i \subset \partial H_i$, $i = 1, \ldots, k$. Uvažujme polyhedron $M := H_1 \cap \cdots \cap H_k$. Zřejmě platí $P \subset M$. Ukážeme, že také $M \subset P$. Nechť pro spor existuje bod $x \in M \setminus P$. Úsečka $[xy]$ musí protnout hranici ∂P v nějakém bodě z. Podle Věty 2.2 prochází bodem z opěrná nadrovina polytopu P, a tedy z leží v nějaké stěně F_i. Příslušný opěrný poloprostor H_i pak nutně obsahuje bod y a nemůže tedy obsahovat bod x, tedy $x \notin H_i \supset M$, což je spor.

Je-li $\dim P < d$, vyjádříme nejprve afinní obal $A := \operatorname{aff} P$ jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů $Q_1 \cap \ldots Q_m$. Dále podle první části důkazu víme, že $P = H_1' \cap \cdots \cap H_k'$ pro uzavřené poloprostory $H_1', \ldots, H_k'$ v A. Pak $H_i := H_i' \oplus A^\perp$ ($A^\perp$ je kolmý podprostor k A) jsou uzavřené poloprostory $\mathbb{R}^d$ a platí $P = Q_1 \cap \ldots Q_m \cap H_1 \cap \cdots \cap H_k$. □

3 Extremální body

Definice 3.1. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní a uzavřená. Bod $x \in A$ je *extremálním bodem* A, jestliže x nelze vyjádřit jako netriviální konvexní kombinaci bodů z A (tedy jestliže $x = (1-t)y + tz$ pro nějaké $y, z \in A$ a

$t \in (0,1)$, pak $x = y = z$). Množinu všech extremálních bodů množiny A značíme $\operatorname{ext} A$.

Pozn.:

1. $x \in \operatorname{ext} A$ právě tehdy, když $A \setminus \{x\}$ je konvexní.
2. Extremálními body polytopu jsou právě všechny jeho vrcholy.
3. $\operatorname{ext} A \neq \emptyset$ právě tehdy, když A neobsahuje žádnou přímku.
4. Je-li $\{x\}$ opěrnou množinou A, je x extremálním bodem. Opačná implikace neplatí.

Věta 3.1 (Krein-Milman)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní a kompaktní a $A \subset K$. Pak*

$$K = \operatorname{conv} A \iff A \supset \operatorname{ext} K.$$

Speciálně platí $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K)$.

Důkaz. A. Nechť $K = \operatorname{conv} A$ a $x \in \operatorname{ext} K$. Pokud by x neležel v A, pak $A \subset K \setminus \{x\}$, tedy $\operatorname{conv} A \subset K \setminus \{x\}$, což by byl spor, tedy nutně $x \in A$.

B. Pro opačnou inkluzi stačí ukázat, že $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K)$. Důkaz provedeme indukcí podle dimenze prostoru d. Je-li $d = 1$, pak $K = [a,b]$ a $\operatorname{ext} K = \{a,b\}$, rovnost tedy zřejmě platí. V indukčním kroku budeme předpokládat, že rovnost platí ve všech dimenzích menších než d, a mějme konvexní kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ a bod $x \in K$. Buď g libovolná přímka procházející bodem x. Označme $g \cap K =: [y,z]$ (jedná se o kompaktní konvexní podmnožinu přímky, tedy interval). Body y, z zřejmě leží na hranici K, tedy podle Support Theorem jimi procházejí nějaké opěrné nadroviny E_y, E_z, a budte $K_y := K \cap E_y$, $K_z := K \cap E_z$ příslušně opěrné množiny. Jedná se množiny dimenze menší než d, tedy podle indukčního předpokladu je $K_y = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_y)$ a $K_z = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_z)$. Dále platí $\operatorname{ext} K_y \subset \operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} K_z \subset \operatorname{ext} K$ (skutečně, je-li např. $p \in \operatorname{ext} K_y$, $p = (1-\alpha)q + \alpha w$ pro $q, w \in K$ a $\alpha \in (0,1)$, pak nutně $q, w \in E_y$, a tedy $q = w$). Dostáváme tedy

$$x \in [y,z] \subset \operatorname{conv}(\operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_y) \cup \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_z)) \subset \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K).$$

□

Důsledek 3.2. *Pro konvexní a kompaktní množinu $P \subset \mathbb{R}^d$ platí: P je polytop právě tehdy, když $\operatorname{ext} P$ je konečná.*

Věta 3.3 (Weyl-Minkowski, druhá část)**.** *Každý omezený mnohostěn v* $\mathbb{R}^d$ *je polytop.*

Důkaz. Buď $P = \bigcap_{i=1}^k H_i$ omezený mnohostěn. Ukážeme, že množina $\operatorname{ext} P$ je konečná. Buď $x \in \operatorname{ext} P$. Položme

$$A_i := \begin{cases} E_i := \partial H_i & \text{pokud } x \in E_i, \\ \operatorname{int} H_i & \text{pokud } x \notin E_i, \end{cases}$$

a $D := \bigcap_{i=1}^k A_i$. Zřejmě $x \in D \subset P$ a množina D je konvexní a relativně otevřená (tzn. otevřená v $\operatorname{aff} D$), tedy $\dim D = 0$ (jinak by nemohla obsahovat extremální bod), tudíž $D = \{x\}$. Protože podle konstrukce existuje jen konečně mnoho takovýchto množin D, musí být množina $\operatorname{ext} P$ konečná. □

Definice 3.2. Bod $x \in A$ uzavřené konvexní množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ nazveme *exponovaným bodem* A, jestliže $\{x\}$ je opěrná množina A. Množinu všech exponovaných bodů množiny A značíme $\exp A$.

Poznámka 3.1. Zřejmě $\exp A \subset \operatorname{ext} A$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. $0 \in \operatorname{ext} A \setminus \exp A$ pro $A = [0,1]^2 \cup B((0, \frac{1}{2}), \frac{1}{2})$.

Věta 3.4 (Straszewicz)**.** *Pro* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvexní kompaktní platí*

$$K = \overline{\operatorname{conv}}(\exp K).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že K má alespoň dva body. Z kompaktnosti K snadno plyne, že ke každému bodu $x \in \mathbb{R}^d$ existuje bod $y_x \in K$ takový, že

$$\|y_x - x\| = \max_{y \in K} \|y - x\|.$$

Nadrovina E_x procházející bodem y_x a kolmá k $y_x - x$ je zřejmě opěrnou nadrovinou K a platí $K \cap E_x = \{y_x\}$ (jinak by bod y_x nebyl nejvzdálenější od x v K), tedy $y_x \in \exp K$. Označme $\hat{K} := \overline{\operatorname{conv}}\{y_x : x \in \mathbb{R}^d\}$. $\hat{K}$ je konvexní kompaktní podmnožinou K. Ukážeme, že $\hat{K} = K$ (z čehož samozřejmě plyne tvrzení).

Nechť pro spor existuje bod $x \in K \setminus \hat{K}$. Pak nadrovina E' procházející bodem $x' := \Pi_{\hat{K}}(x)$ a kolmá k $x' - x$ je opěrnou nadrovinou $\hat{K}$. Buď $R := \operatorname{diam} \hat{K}$. Zvolme $t > 0$ tak velké, aby

$$t + \|x - x'\| > \sqrt{t^2 + R^2}.$$

Pak platí

$$\|z - x\| > \max_{y \in \hat{K}} \|z - y\|,$$

tedy i $\|z - x\| > \|z - y_z\|$, což je ve sporu s definicí $y_z \in \hat{K}$. □

Příklad 3.1 (Problém diet)**.** Jedná se o problém lineárního programování, který je obecně tvaru

$$\min\{\langle x, u\rangle : x \in P\}, \quad P \text{ mnohostěn.}$$

Uvažujeme n složek potravy s cenami $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ za jednotku, a m živin, přitom j-tá složka potravy obsahuje množství α_{ij} i-té živiny na jednotku. Úkolem je sestavit nejlevnější dietu obsahující složky v množství $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tak, aby obsahovala celkové množství β_i i-té živiny. Mnohostěn P je tedy určen podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i, &\quad i = 1, \ldots, m, \\ \xi_j \geq 0, &\quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

a minimalizovanou funkcí je funkce ceny

$$\langle \xi, \gamma\rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \xi_j.$$

Zřejmě $\dim P \geq n - m$. Dále řešení musí splňovat $\xi \in \operatorname{ext} P$ a musí být určeno alespoň n rovnicemi odpovídajícími hraničním nadrovinám mnohostěnu P, tedy aspoň $n - m$ souřadnic ξ_j musí být rovno nule.

4 Dualita

Definice 4.1. Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdnou značíme

$$A^o := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle \leq 1,\ y \in A\}$$

duální (polární) množinu k množině A.

Pozn.:

1. A^o je konvexní uzavřená, $0 \in A$.
2. $(\mathbb{R}^d)^o = \{0\}$, $\{0\}^o = \mathbb{R}^d$.
3. $A \subset B \implies B^o \subset A^o$.
4. $(\bigcup_i A_i)^o = \bigcap_i A_i^o$.
5. $(tA)^o = \frac{1}{t} A^o$, $t > 0$.

6. $L \subset \mathbb{R}^d$ lineární podprostor $\implies L^o = L^\perp$.
7. Je-li $P = \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_m\}$ polytop, je

$$P^o = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y_i \rangle \leq 1,\, i = 1, \dots, m\}$$

   mnohostěn.
8. $A \subset (A^o)^o =: A^{oo}$.

Věta 4.1 (Bipolární věta)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní uzavřená, $0 \in A$. Pak*

$$A^{oo} = A.$$

Důkaz. Víme, že $A \subset A^{oo}$. Dokážeme obrácenou inkluzi. Nechť pro spor neplatí a existuje bod $y \in A^{oo} \setminus A$. Pak existuje nadrovina $E := \{x : \langle x, u \rangle = \alpha\}$ ostře oddělující y od A, tedy např. $\langle y, u \rangle > \alpha$ a $\langle x, u \rangle < \alpha$, $x \in A$. Protože $0 \in A$, musí být $\alpha > 0$. Položme $v := \frac{1}{\alpha} u$. Pak pro všechny body $x \in A$ platí $\langle x, v \rangle < 1$, tedy $v \in A^o$. Dále je $\langle y, v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle y, u \rangle > 1$, tedy $y \notin A^{oo}$, což je spor. □

Cvičení 4.1. Pro $A \neq \emptyset$ platí

$$A^{oo} = \overline{\operatorname{conv}}(A \cup \{0\}).$$

Příklad 4.1.

1. Pro mnohostěn $A = \{x : x \cdot u_i \leq 1,\, i = 1, \dots, m\}$, platí

$$A^o = \operatorname{conv}\{0, u_1, \dots, u_m\},$$

   tedy A^o je polytop.
2. $B(0, \rho)^o = B(0, \frac{1}{\rho})$.
3. $\left([-1,1]^d\right)^o = \{x : |x^1| + \cdots + |x^d| \leq 1\}$.
4. $\{x : \|x\|_p \leq 1\}$ a $\{x : \|x\|_q \leq 1\}$ jsou vzájemně duální, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zde $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$.

Definice 4.2. Množina $C \subset \mathbb{R}^d$ je *kužel* (s vrcholem v počátku), jestliže $tC = C$, $t > 0$. Symbolem $C(A)$ značíme nejmenší kužel obsahující neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$.

Poznámka 4.1. Je-li $C \subset \mathbb{R}^d$ neprázdný kužel, pak C^o je konvexní uzavřený kužel

$$C^o = \{x : x \cdot y \leq 0,\, y \in C\}.$$

Věta 4.2. *Nechť $e \in S^{d-1}$, $H = e^{\perp}$ nadrovina, $K \subset H$ neprázdná. Pak*

$$K^o \cap H = (C(K+e)^o \cap (H-e)) + e \subset H.$$

Důkaz. Duální množina ke kuželu $C(A)$ generovanému množinou A má tvar

$$C(A)^o = \{y : \langle y, a\rangle \le 1,\, a \in C(A)\} = \{y : \langle y, a\rangle \le 0,\, a \in A\}.$$

V našem případě tedy dostaneme

$$C(K+e)^o = \{y : \langle y, x+e\rangle \le 0,\, x \in K\},$$

$$\begin{aligned} C(K+e)^o \cap (H-e) &= \{y : \langle y, x+e\rangle \le 0,\, x \in K,\, \langle y, e\rangle = -1\} \\ &= \{y : \langle y, e\rangle = -1,\, \langle y, x\rangle \le 1,\, x \in K\}. \end{aligned}$$

Protože $K \subset H$, je $\langle x, e\rangle = 0$ pro všechny $x \in K$, a tedy

$$\begin{aligned} (C(K+e)^o \cap (H-e)) + e &= \{z : \langle z, e\rangle = 0,\, \langle z, x\rangle \le 1,\, x \in K\} \\ &= K^o \cap H. \end{aligned}$$

□

5 Opěrná funkce

Definice 5.1. Pro neprázdnou omezenou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme její *opěrnou funkci* předpisem

$$h(A, y) := \sup\{x \cdot y : x \in K\}, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka 5.1.

1. $h(A, \cdot) = h(\overline{\text{conv}} A, \cdot)$.
2. $K \subset L \implies h(K, \cdot) \le h(L, \cdot)$.
3. $h(\alpha K \oplus \beta L, \cdot) = \alpha h(K, \cdot) + \beta h(L, \cdot)$, $\alpha, \beta \ge 0$.

Definice 5.2. Funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je *sublineární,* jestliže

i $f(tx) = tf(x)$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ (f je pozitivně homogenní), a

ii $f(x+y) \le f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ (f je subaditivní).

Poznámka 5.2.

1. Opěrná funkce omezené neprázdné množiny je sublineární.

2. Každá sublineární funkce je konvexní.

Tvrzení 5.1. *Každá konvexní reálná funkce definovaná na $\mathbb{R}^d$ je spojitá.*

Důkaz. Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ konvexní. Je-li $P = \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ polytop, pak pro každý bod $x = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in P$ ($t_i \geq 0$, $t_1 + \dots + t_k = 1$) platí

$$f(x) = f(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) \leq t_1 f(v_1) + \dots + t_k f(v_k) \leq \max_i f(v_i) < \infty,$$

tedy funkce f je shora omezená na P. Funkce f je tedy shora omezená na kompaktních množinách.

Nyní ukážeme spojitost. Předpokládejme pro spor, že funkce f není spojitá v nějakém bodě x. Pak existuje posloupnost $x_i \to x$ a $\varepsilon > 0$ takové, že buď (a) $f(x_i) \geq f(x) + \varepsilon$, nebo (b) $f(x_i) \leq f(x) - \varepsilon$, $i \in \mathbb{N}$. Uvažujme nejprve případ (a). Položme $\delta_i := \|x_i - x\|$ a $y_i := x + \delta_i^{-1}(x_i - x)$. Pak $x_i = \delta_i y_i + (1 - \delta_i)x$ a z konvexity f tedy plyne $f(x_i) \leq \delta_i f(y_i) + (1 - \delta_i) f(x)$, tedy

$$f(y_i) = \delta_i^{-1}(f(x_i) - f(x)) + f(x) \geq \delta_i^{-1}\varepsilon + f(x) \to \infty, \quad i \to \infty,$$

což je spor, protože posloupnost (y_i) je omezená. V případě (b) postupujeme podobně, položíme $z_i := x_i + \delta_i^{-1}(x - x_i)$ a ukážeme, že $f(z_i) \to \infty$. □

Věta 5.2. *Ke každé sublineární funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ existuje právě jedno konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $h(K, \cdot) = f$.*

Důkaz. K sublineární funkci f uvažujme její *epigraf*

$$\operatorname{epi} f := \{(y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \ f(y) \leq t\}.$$

Není těžké ověřit, že epi f je uzavřený konvexní kužel. Položme

$$K := \{x \in \mathbb{R}^d : \ \langle x, u \rangle \leq f(u), \ u \in \mathbb{R}^d\}.$$

Ukážeme, že K je hledané konvexní těleso. K je zřejmě konvexní a uzavřená množina. Pro $x \in K$ dále platí $\langle x, x \rangle \leq f(x)$, tedy

$$\|x\| \leq \|x\|^{-1} f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \max_{|y\|=1} f(y) < \infty$$

(použili jsme pozitivní homogenitu a spojitost f), tedy K je omezená. Neprázdnost K ukážeme později.

Zvolme pevně vektor $u \in \mathbb{R}^d$. Buď E opěrná nadrovina (v $\mathbb{R}^{d+1}$) množiny $\operatorname{epi} f$ v bodě $(u, f(u)) \in \partial \operatorname{epi} f$. Protože $\operatorname{epi} f$ je kužel, opěrná nadrovina prochází počátkem a má tvar

$$E = \{(y,t) : \langle (y,t), (v,s) \rangle = 0\}$$

pro nějaký $(v, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Kdyby $s = 0$, pak by $E = \{(y,t) : \langle y, v \rangle = 0\}$, ale (y,t) je vnitřním bodem $\operatorname{epi} f$ pro každé y a dostatečně velké t, a nemůže tedy ležet v opěrné nadrovině. Je tedy $s \neq 0$ a můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $s = -1$. Máme tedy

$$E = \{(y,t) : \langle y, v \rangle = t\}$$

a příslušný opěrný poloprostor je

$$H = \{(y,t) : \langle y, v \rangle \leq t\}.$$

Ukážeme, že $v \in K$. K tomu je třeba ukázat, že $\langle v, y \rangle \leq f(y)$ pro všechna $y \in \mathbb{R}^d$. Nechť pro spor $\langle v, y \rangle > f(y)$ pro nějaké y a zvolme $f(y) < t < \langle v, y \rangle$. Pak $(y,t) \in \operatorname{epi} f \subset H$, tedy $\langle y, v \rangle \leq t$, což je spor. Tedy $v \in K$.

Nyní ukážeme, že $h(K,u) = f(u)$. Nerovnost $h(K,u) \leq f(u)$ plyne přímo z definice K. Dále platí $h(K,u) \geq \langle u, v \rangle$ (protože $v \in K$), a $\langle u, v \rangle = f(u)$ (protože $(u, f(u)) \in E$). Platí tedy i $h(K,u) \geq f(u)$. Dokázali jsme tedy, že $h(K,u) = f(u)$.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Jsou-li K, K' dvě různá konvexní tělesa a $x \in K' \setminus K$, pak y lze od K ostře oddělit nadrovinou E, kterou lze vyjádřit jako $E = \{y : \langle y, u \rangle = \alpha\}$ pro nějaké $u \neq 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, přitom $\langle z, u \rangle \leq \alpha$ pro všechna $z \in K$, ale $\langle x, u \rangle > \alpha$. Pak zřejmě

$$h(K,u) \leq \alpha < \langle x, u \rangle \leq h(K', u),$$

tedy $h(K,\cdot) \neq h(K',\cdot)$. $\square$

Definice 5.3. Pro konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek definujeme jeho *radiální funkci* předpisem

$$\rho(K,x) := \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\}.$$

Věta 5.3. *Pro konvexní těleso $K \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek ve svém vnitřku platí*

$$h(K^o, \cdot) = \frac{1}{\rho(K,\cdot)}, \quad h(K,\cdot) = \frac{1}{\rho(K^o,\cdot)}.$$

Důkaz. Protože $K^{oo} = K$ (Bipolární věta), stačí ukázat první rovnost. Označme

$$\tilde{K} := \{x : h(K^o, x) \leq 1\}.$$

Ukážeme, že $\hat{K} = K$. Je-li $x \in \hat{K}$ a $u \in K^o$, pak $\langle u, x\rangle \leq h(K^o, x) \leq 1$ a tedy $x \in K^{oo} = K$. Je-li naopak $x \in K$, pak existuje $v \in K^o$ takový, že $k(K^o, x) = \langle v, x\rangle \leq 1$, a tedy $x \in \tilde{K}$. Tedy $\hat{K} = K$. Dále platí

$$\begin{aligned}\rho(K, x) = \rho(\tilde{K}, x) &= \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in \tilde{K}\}\\ &= \max\{\lambda \geq 0 : h(K^o, \lambda x) \leq 1\}\\ &= \max\{\lambda \geq 0 : h(K^o, x) \leq \lambda^{-1}\}\\ &= \frac{1}{h(K^o, x)}.\end{aligned}$$

□

6 Prostory kompaktních a konvexních těles

Značení: $\mathcal{K}^d$ - množina všech neprázdných kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^d$ - množina všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin $\mathbb{R}^d$ (konvexních těles), $B^d = B(0,1)$ jednotková koule v $\mathbb{R}^d$, $S^{d-1} = \partial B^d$ - jednotková sféra v $\mathbb{R}^d$.

Definice 6.1. *Hausdorffova vzdálenost* neprázdných kompaktních množin $A, B \in \mathcal{K}^d$ je definována jako

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a, B), \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b, A)\right\}.$$

(Připomeňme, že $\operatorname{dist}(a, B) = \inf_{b\in B} \|a - b\|$.)

Poznámka 6.1. *d_H je metrika na $\mathcal{K}^d$ (cvičení).*

Lemma 6.1. *Pro $A, B \in \mathcal{K}^d$ platí*

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B + \varepsilon B^d, B \subset A + \varepsilon B^d\}.$$

Poznámka 6.2. Vzhledem ke kompaktnosti množin A, B je infima ve výše uvedeném vztahu nabyto, tedy pro $\varepsilon = d_H(A, B)$ platí $A \subset B + \varepsilon B^d$ a $B \subset A + \varepsilon B^d$.

Důkaz. Označme $\tilde{d}(A,B) := \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B + \varepsilon B^d, B \subset A + \varepsilon B^d\}$. Ukážeme nejprve, že $d_H(A,B) \leq \tilde{d}(A,B)$. Je-li $a \in A$ a $\varepsilon = \tilde{d}(A,B)$, pak podle předpokladu a vzhledem k předcházející poznámce je $A \subset B + \varepsilon B^d$, tedy $a = b + \varepsilon u$ pro nějaké $u \in B^d$, z čehož plyne $\operatorname{dist}(a,B) \leq \|a - b\| \leq \varepsilon$. Analogicky se dokáže, že $\operatorname{dist}(b,A) \leq \varepsilon$ pro každé $b \in B$, tedy $d_H(A,B) \leq \varepsilon$.

Nyní ukážeme, že $\tilde{d}(A,B) \leq d_H(A,B) =: \varepsilon$. Je-li $a \in A$, pak $\operatorname{dist}(a,B) \leq \varepsilon$, tedy (z kompaktnosti B) existuje $b \in B$ pro něž $\|a - b\| \leq \varepsilon$, tedy $a = b + \varepsilon \frac{a-b}{\varepsilon} \in B + \varepsilon B^d$. Ukázali jsme tedy, že $A \subset B + \varepsilon B^d$. Inkluze $B \subset A + \varepsilon B^d$ se dokáže symetricky, tedy $\tilde{d}(A,B) \leq \varepsilon$. $\square$

Lemma 6.2. *Pro $K, L \in \mathcal{C}^d$ platí*

$$d_H(K,L) = \sup_{|u|=1} |h(K,u) - h(L,u)|,$$

přitom suprema je nabyto.

Důkaz. Označme $\hat{d}(K,L) := \sup_{|u|=1} |h(K,u) - h(L,u)|$. Nejprve ukážeme, že $d_H(K,L) \leq \hat{d}(K,L)$. Buď $x \in K$ libovolný a označme $y := \Pi_L(x)$ (nejbližší bod k x v L). Ukážeme, že $\|x - y\| \leq \hat{d}(K,L)$. V případě $x = y$ je nerovnost zřejmá. Pokud $x \neq y$, označme $u := \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Podle Věty 2.2 je nadrovina $\{z : \langle z,u\rangle = \langle y,u\rangle\}$ opěrná pro L, tedy $h(L,u) = \langle y,u\rangle$. Zároveň platí $h(K,u) \geq \langle x,u\rangle$, tedy

$$\operatorname{dist}(x,L) = \|x - y\| = \langle x,u\rangle - \langle y,u\rangle \leq h(K,u) - h(L,u) \leq \hat{d}(K,L).$$

Symetricky se dokáže, že $\operatorname{dist}(y,K) \leq \hat{d}(K,L)$ pro všechna $y \in L$.

Zbývá ukázat, že $\hat{d}(K,L) \leq d_H(K,L) =: \varepsilon$. Buď $u \in S^{d-1}$ libovolný. Z kompaktnosti L existuje $y \in L$ takový, že $h(L,u) = \langle y,u\rangle$. Pak podle definice Hausdorffovy vzdálenosti existuje $x \in K$ takový, že $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Pak

$$h(L,u) - h(K,u) \leq \langle y,u\rangle - \langle x,u\rangle = \langle y - x,u\rangle \leq \|y - x\| \leq \varepsilon.$$

Nerovnost $h(K,u) - h(L,u) \leq \varepsilon$ se dokáže symetricky. $\square$

Lemma 6.3. $A_n \searrow A \implies d_H(A_n,A) \to 0,\ n \to \infty,\ A_n, A \in \mathcal{K}^d$.

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že $A_n \subset A + \varepsilon B^d$ pro dostatečně velká n. Protože $A \subset A_n$, bude tím dokázáno, že $d_H(A,A_n) \leq \varepsilon$. Platí

$$A_1 \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \cup \operatorname{int}(A + \varepsilon B^d).$$

Množiny $A_1 \setminus A_n$ jsou relativně otevřené v A_1, jedná se tedy o otevřené pokrytí kompaktního prostoru A_1, a existuje tedy konečné podpokrytí. Vzhledem k monotonii množin A_n tedy existuje n_0 takové, že

$$A_1 \subset (A_1 \setminus A_{n_0}) \cup \operatorname{int}(A + \varepsilon B^d),$$

tedy $A_{n_0} \subset \operatorname{int}(A + \varepsilon B^d) \subset A + \varepsilon B^d$. □

Věta 6.4. $(\mathcal{K}^d, d_H)$ *je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Buď $(K_n) \subset \mathcal{K}^d$ cauchyovská posloupnost. Označme

$$A_n := \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i}, \quad A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Každá cauchyovská posloupnost je omezená, tedy všechny K_n, a tedy i A_n, jsou obsaženy v nějaké omezené podmnožině $\mathbb{R}^d$, je tedy $A_n \in \mathcal{K}^d$. Dále $A_n \searrow A$, tedy $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{K}^d$, a $d_H(A_n, A) \to 0$ podle předchozího lemmatu. Ukážeme, že také $d_H(K_n, A) \to 0$.

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje n_0 takové, že $A_n \subset A + \varepsilon B^d$, $n \geq n_0$, tedy i $K_i \subset A + \varepsilon B^d$, $i \geq n_0$. Z cauchyovskosti (K_n) existuje n_1 takové, že $K_j \subset K_i + \varepsilon B^d$ kdykoliv $i, j \geq n_1$. Tedy také

$$\bigcup_{j=n}^{\infty} K_j \subset K_i + \varepsilon B^d, \quad n, i \geq n_1,$$

a protože množina $K_i + \varepsilon B^d$ je uzavřená, také $A_n \subset K_i + \varepsilon B^d$, $n, i \geq n_1$. Pak ale nutně $A \subset A_n \subset K_i + \varepsilon B^d$, $i \geq n_1$. Z obou dokázaných inkluzí už plyne, že $d_H(K_i, A) \leq \varepsilon$ pro $i \geq \max\{n_0, n_1\}$. □

Věta 6.5. *Prostor* $(\mathcal{K}^d, d_H)$ *je separabilní a každá omezená uzavřená podmnožina* $(\mathcal{K}^d, d_H)$ *je kompaktní.*

Důkaz. Buď $(K_n) \subset \mathcal{K}^d$ omezená posloupnost. Ukážeme, že má konvergentní podposloupnost. Tím bude dokázáno druhé tvrzení.

Z omezenenosti plyne, že existuje krychle $C \subset \mathbb{R}^d$ (o hraně a) obsahující všechny množiny K_n. Pro $m \in \mathbb{N}$ rozdělme

$$C = \bigcup_{j=1}^{2^{md}} C_j^m$$

na 2^{md} krychliček o hraně $a2^{-m}$. Pro libovolnou $K \in \mathcal{K}^d$ položme

$$A_m(K) := \bigcup_{C_j^m \cap K \neq \emptyset} C_j^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

(sjednocení všech krychliček úrovně m zasahujících K). Uvědomme si, že pro každé m existuje jen konečně mnoho možných konfigurací $A_m(K)$.

Pro $m = 1, 2, \dots$ postupně vybereme podposloupnosti

$$(K_i) \supset (K_i^{(1)}) \supset (K_i^{(2)}) \supset \dots$$

tak, aby $T_m := A_m(K_i^{(m)})$ nezáviselo na i. Ukážeme, že "diagonálně vybraná" posloupnost $(K_m^{(m)})$je cauchyovská (tedy vzhedem k úplnosti prostoru konvergentní).

Protože $A_m(K_i^{(m)}) = T_m$ pro všechna i, je $d_H(K_i^{(m)}, K_j^{(m)}) \leq \sqrt{d}a2^{-m}$ pro všechna m, i, j, a tedy také $d_H(K_i^{(m)}, K_j^{(n)}) \leq \sqrt{d}a2^{-m}$ pro všechna i, j a $n \geq m$. Speciálně tedy $d_H(K_m^{(m)}, K_n^{(n)}) \leq \sqrt{d}a2^{-m}$ pro všechna $n \geq m$, což je podmínka cauchyovskosti.

Zároveň je zřejmé, že konečná sjednocení všech krychliček typu $C_j^{(m)}$ tvoří hustou podmnožinu podprostoru $\{K \in \mathcal{K}^d : K \subset C\}$. Celý prostor $\mathcal{K}^d$ je spočetným sjednocením takovýchto podprostorů, je tedy separabilní. □

Věta 6.6. *$\mathcal{C}^d$ je uzavřená podmnožina $(\mathcal{K}^d, d_H)$.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $\mathcal{K}^d \setminus \mathcal{C}^d$ je otevřená. Buď $A \in \mathcal{K}^d \setminus \mathcal{C}^d$. Množina A není kovexní, tedy existují $x, y \in A$ a $t \in (0, 1)$ takové, že

$$z := (1 - t)x + ty \notin A.$$

Z kompaktnosti A existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B(z, 2\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Ukážeme, že libovolná množina $B \in \mathcal{K}^d$ s $d_H(A, B) < \varepsilon$ nepatří do $\mathcal{C}^d$, tedy není konvexní. Z definice Hausdorffovy vzdálenost existují body $x', y' \in B$ s $\|x - x'\| \leq \varepsilon$ a $\|y - y'\| \leq \varepsilon$. Snadno se ověří, že pak také bod $z' := (1 - t)x' + ty'$ splňuje $\|z - z'\| \leq \varepsilon$. Pak ovšem $z' \notin B$ (protože $\operatorname{dist}(z', A) > \varepsilon$), tedy B není konvexní. □

Věta 6.7. *Nechť $K \in \mathcal{C}^d$ a $\varepsilon > 0$. Pak platí:*

(a) Existují polytopy P, Q takové, že $P \subset K \subset Q$ a $d_H(P, K) \leq \varepsilon$, $d_H(Q, K) \leq \varepsilon$.

(b) Je-li počátek obsažen v relativním vnitřku K, pak existuje polytop P takový, že $P \subset K \subset (1+\varepsilon)P$.

Důkaz. (a) Z otevřeného pokrytí $\partial K \subset \bigcup_{x \in \partial K} U_\varepsilon(x)$ kompaktní množiny ∂K lze vybrat konečné podpokrytí tedy existují body $x_1, \dots, x_k \in \partial K$ takové, že

$$\partial K \subset U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_k).$$

Položme $P := \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$. Zřejmě $P \subset K$ a $\partial K \subset P + \varepsilon B^d$, a tedy také $K \subset P + \varepsilon B^d$. Platí tedy $d_H(P, K) \leq \varepsilon$.

Pro konstrukci polytopu Q využijeme opěrné nadroviny K. Platí $K = \bigcap_{x \in \partial K} H_x$, kde H_x je (nějaký) opěrný poloprostor K s $x \in \partial H$ (viz Věta 2.5). Komplementy H_x^C jsou otevřené množiny pokrývající K^C, a tedy i kompaktní množinu $\partial(K + \varepsilon B^d)$. Existují tedy body $x_1, \dots, x_m \in \partial K$ takové, že

$$\partial(K + \varepsilon B^d) \subset H_{x_1}^C \cup \dots \cup H_{x_m}^C.$$

Položme $Q := H_{x_1} \cap \dots \cap H_{x_m}$. Q je mnohostěn obsahující K. Zároveň každý bod $y \in \partial(K + \varepsilon B^d)$ neleží v některé H_{x_j}, a tedy ani v Q, tedy nutně $Q \subset K + \varepsilon B^d$. Q je tedy omezený, čili polytop, a platí $d_H(K, Q) \leq \varepsilon$.

(b) Předpokládejme, že $\dim K = d$, a tedy $0 \in \operatorname{int} K$. (Kdyby $\dim K < d$, provedli bychom stejnou konstrukci v afinním obalu $\operatorname{aff} K$.) Položme $\varepsilon' := \sqrt{1+\varepsilon} - 1$. Pak zřejmě $K \subset \operatorname{int} K + \varepsilon' K$ a provedeme podobnou konstrukci jako pro polynom Q výše, s tím rozdílem, že nyní najdeme body $x_1, \dots, x_m \in \partial K$ tak, aby

$$\partial(K + \varepsilon' K) \subset H_{x_1}^C \cup \dots \cup H_{x_m}^C.$$

Opět položíme $Q := H_{x_1} \cap \dots \cap H_{x_m} \supset K$. Nyní platí $Q \subset K + \varepsilon' K = (1+\varepsilon')K$, tedy

$$K \subset Q \subset (1+\varepsilon')K \subset (1+\varepsilon')Q.$$

Polytop $P := (1+\varepsilon')^{-1} Q$ pak splňuje

$$P \subset K \subset (1+\varepsilon')^2 P = (1+\varepsilon)P.$$

□

7 Objem a povrch konvexního tělesa

Objem konvexního tělesa $K \in \mathcal{C}^d$ definujeme jako $V_d(K) := \lambda^d(K)$ (Lebesgueova míra K). Často budeme psát pouze $V(K)$ místo $V_d(K)$. Z vlastností Lebesgueovy míry plynou následující vlastnosti objemu:

1. $V_d(K) = V_d(gK)$ pro libovolnou izometrii $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (speciálně translace a rotace).

2. $V_d(tK) = t^d V(K)$, $t \geq 0$.

3. $V_d(K) = 0$ právě tehdy, když $\dim K < d$.

4. $K \subset L \implies V_d(K) \leq V_d(L)$.

Věta 7.1. *Zobrazení $V : K \mapsto V(K)$ je spojité na $(\mathcal{C}^d, d_H)$.*

Poznámka 7.1. Lebesgueova míra samozřejmě není spojitá na prostoru $\mathcal{K}^d$ neprázdných kompaktních množin; stačí si uvědomit, že libovolnou kompaktní množinu lze aproximovat konečnými množinami v Hausdorffově metrice.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathcal{C}^d$. Ukážeme, že V je spojité v K.

(a) Nechť $V(K) = 0$. Pak $\dim K < d$, tedy $K \subset E$ pro nějakou nadrovinu E. K je omezená, tedy $K \subset aB^d \cap E$ pro nějaké $a > 0$. Je-li L jiné konvexní těleso s $d_H(K, L) < \varepsilon$, platí

$$L \subset K + \varepsilon B^d \subset (aB^d \cap H) + \varepsilon B^d,$$

L je tedy obsažena ve válci se základnou $(a + \varepsilon)B^{d-1} \subset E$ v nadrovině E a s výškou 2ε. Platí tedy $V(L) \leq 2\varepsilon(a + \varepsilon)^{d-1}\lambda^{d-1}(B^{d-1}) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(b) Nechť naopak $V(K) > 0$, tedy $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 \in \operatorname{int} K$. Zvolme $\rho > 0$ tak, aby $\rho B^d \subset K$. Ukážeme, že

$$(\forall \lambda > 1)(\exists \varepsilon > 0) : d_H(K, L) < \varepsilon \implies K \subset \lambda L,\ L \subset \lambda K. \tag{1}$$

Pak bude z předpokladu $d_H(K, L) < \varepsilon$ plynout

$$\lambda^{-d} V(K) \leq V(L) \leq \lambda^d V(K),$$

a tím bude důkaz ukončen, neboť λ může být libovolně blízké jedné.

Je-li $0 < \varepsilon < \rho$ a $d_H(K, L) < \varepsilon$, pak $h(L, u) \geq h(K, u) - \varepsilon \geq \rho - \varepsilon$ pro každé $u \in S^{d-1}$, tedy $(\rho - \varepsilon)B^d \subset L$. Dále platí

$$L \subset K + \varepsilon B^d = K + \frac{\varepsilon}{\rho}\rho B^d \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho}\right) K,$$

$$K \subset L + \varepsilon B^d = L + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}(\rho - \varepsilon)B^d \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}\right) L.$$

Zvolíme-li $\varepsilon := \frac{\lambda - 1}{\lambda}\rho$, pak $1 + \frac{\varepsilon}{\rho} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon} = \lambda$, a tedy $L \subset \lambda K$ a $K \subset \lambda L$. Tím je (1) dokázáno a důkaz je hotov. $\square$

Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ a jednotkový vektor $u \in S^{d-1}$ značíme

$$K(u) := K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u\rangle = h(K, u)\}$$

opěrnou množinu K s nadrovinou kolmou k u.

Symbolem $\mathcal{P}^d$ zmačíme množinu všech neprázdných polytopů (konvexních obalů konečných neprázdných množin). Je-li dán polytop $P \in \mathcal{P}^d$, pak opěrné množiny $P(u)$, $u \in S^{d-1}$, nazýváme *stěny* P (obecné dimenze). Symbolem $\mathcal{F}_j(P)$ značíme množinu všech j-rozměrných stěn P, $j = 0, \dots, d-1$ ($\mathcal{F}_0(P)$ je množina všech vrcholů P). Dále značíme

$$\Sigma(P) := \{u \in S^{d-1} : P(u) \in \mathcal{F}_{d-1}(P)\}.$$

Definice 7.1. Buď $P \in \mathcal{P}^d$ polytop. Jeho *povrch* $S_d(P)$ definujeme jako

$$S_d(P) := \sum_{u \in \Sigma(P)} V_{d-1}(P(u)).$$

(Je-li $\dim P \leq d-2$, je $\Sigma(P) = \emptyset$ a prázdnou sumu interpretujeme jako nulu.) Často budeme psát pouze $S(P)$ místo $S_d(P)$.

Poznámka 7.2. V případě $\dim P = d-1$ je $\Sigma(P) = \{-u, u\}$ pro nějaký $u \in S^{d-1}$ a $S(P) = 2\lambda^{d-1}(P)$.

Poznámka 7.3. Objem polytopu P lze vyjádřit jako

$$V_d(P) = \frac{1}{d} \sum_{u \in \Sigma(P)} h(P, u) V_{d-1}(P(u)). \tag{2}$$

Tento vztah lze využít pro elementární rekurzivní definici objemu. V případě $\dim P < d$ je snadno vidět, že (2) dává $V_d(P) = 0$. V případě $\dim P = d$ a $0 \in \operatorname{int} P$ si můžeme P rozložit na zobecněné kužely $P_u := \operatorname{conv}(\{0\} \cup P(u))$, $u \in \Sigma(P)$, které se protínají nejvýše v nadrovině, a z aditivity Lebesgueovy míry dostaneme

$$V(P) = \lambda^d(P) = \sum_{u \in \Sigma(P)} \lambda^d(P_u).$$

Snadno spočteme, že $\lambda^d(P_u) = \frac{1}{d} h(P, u) \lambda^{d-1}(P(u))$, což dává (2). Pro posunutý polytop $P + x$ pak dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d} \sum_{u \in \Sigma(P+x)} h(P+x,u) V_{d-1}((P+x)(u)) \\
&\qquad = \frac{1}{d} \sum_{u \in \Sigma(P)} (h(P,u) + \langle x, u \rangle) V_{d-1}(P(u)) \\
&\qquad = V_d(P) + \frac{1}{d} \left\langle x, \sum_{u \in \Sigma(P)} u\, V_{d-1}(P(u)) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Skalární součin na konci je lineární funkcí v x a je roven nule na nějaké otevřené množině (kdy $x \in \operatorname{int} P$), tedy je roven nule pro všechna x, čímž je vztah (2) dokázán.

Lemma 7.2. *Povrch polytopu má tyto vlastnosti:*

(a) S je invariantní vůči všem eukleidovským pohybům.

(b) $S(tP) = t^{d-1} S(P)$, $t \geq 0$.

(c) je-li $P \subset Q$, pak $S(P) \leq S(Q)$.

Důkaz. Vlastnosti (a) a (b) plynou přímo z vlastností objemu. K důkazu (c) využijeme rovnosti odvozené v předchozí poznámce:

$$\sum_{u \in \Sigma(P)} u\, V_{d-1}(P(u)) = 0.$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti z ní odvodíme

$$V_{d-1}(P(u)) \leq \sum_{u' \neq u} V_{d-1}(P(u')),$$

tedy že plocha libovolné stěny P je menší nebo rovna součtu ploch všech zbývajících stěn. Z toho plyne, že pro polytop Q a libovolný uzavřený poloprostor H platí

$$S(Q \cap H) \leq S(Q).$$

Protože polytop $P \subset Q$ můžeme vyjádřit jako průnik Q s konečně mnoha poloprostory, dokázali jsme monotonii (c). $\square$

Poznámka 7.4. Pro objem konvexního tělesa zřejmě platí

$$V(K) = \sup_{P \subset K} V(P) = \inf_{P \supset K} V(P), \quad K \in \mathcal{C}^d$$

(supremum a infimum bereme přes polytopy P). Podobnou aproximací budeme definovat povrch konvexního tělesa.

Definice 7.2. Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ definujeme

$$S_-(K) := \sup_{P \subset K} S(P), \quad S_+(K) := \inf_{P \supset K} S(P)$$

(suprema a infima jsou chápána přes $P \in \mathcal{P}^d$).

Věta 7.3 (a definice)**.** *Pro $K \in \mathcal{K}^d$ platí*

$$S_+(K) = S_-(K).$$

Společnou hodnotou $S(K) := S_+(K) = S_-(K)$ definujeme povrch *konvexního tělesa K.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že 0 leží v relativním vnitřku K (S_+ i S_- jsou zřejmě invariantní vzhledem k posunům). Pak podle Věty 6.7 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polytop P, pro nějž $P \subset K \subset (1+\varepsilon)P$, tedy

$$S(P) \leq S_-(K) \leq S_+(K) \leq S((1+\varepsilon)P) = (1+\varepsilon)^{d-1} S(P).$$

Limitnm přechodem $\varepsilon \to 0$ zjistíme, že $S_-(K) = S_+(K)$. □

Důsledek 7.4. *Povrch konvexního tělesa má tyto vlastnosti ($K, L \in \mathcal{C}^d$):*

1. *$S(K) = S(gK)$ pro každou izometrii $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,*
2. *$S(tK) = t^{d-1} S(K)$, $t \geq 0$,*
3. *je-li $K \subset L$, pak $S(K) \leq S(L)$.*

Definice 7.3. Pro konvexní těleso $K \in \mathcal{C}^d$ označme

$$v(K, \varepsilon) := V(K + \varepsilon B^d), \quad \varepsilon \geq 0.$$

Poznámka 7.5. Zřejmě $v(\cdot, \cdot)$ je rostoucí v obou argumentech.

Poznámka 7.6. Pro $P \in \mathcal{P}^d$ platí

$$v(P, \varepsilon) = V(P) + \sum_{k=1}^{d} \varepsilon^k \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-k}(P)} V_{d-k}(F) \gamma_F,$$

kde

$$\gamma_F := V_k\{tu : 0 \leq t \leq 1,\, u \in n_F\},$$
$$n_F := \{u \in S^{d-1} : F \subset P(u)\}, \quad F \in \mathcal{F}_{d-k}(P).$$

Lemma 7.5. *Zobrazení $K \mapsto v(K,\varepsilon)$ je spojité pro každé $\varepsilon \geq 0$.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ uvažujme zobrazení $\psi : \mathcal{C}^d \to \mathcal{C}^d$, $\psi(K) = K + \varepsilon B^d$. Z aditivity opěrné funkce dostaneme $h(K+\varepsilon B^d, u) = h(K,u)+\varepsilon$, $u \in S^{d-1}$, takže pro libovolná dvě konvexní tělesa K, L je

$$h(K + \varepsilon B^d, u) - h(L + \varepsilon B^d, u) = h(K,u) - h(L,u), \quad u \in S^{d-1}.$$

Podle Lemmatu 6.2 je tedy zobrazení ψ spojité. Protože objem je spojitý na $\mathcal{C}^d$, je i složené zobrazení $K \mapsto V \circ \psi(K) = v(K,\varepsilon)$ spojité. □

Lemma 7.6. *Nechť p_i jsou polynomy stupně nejvýše d s nezápornými koeficienty a takové, že $p_i \to f$ na $([0,\infty)$, kde f je nějaká reálná funkce. Pak f je polynom stupně nejvýše d a všechny koeficienty p_i konvergují k příslušným koeficientům f.*

Důkaz. Nechť

$$p_i(r) = a_i^0 + a_i^1 r + a_i^2 r^2 + \cdots + a_i^d r^d, \quad r \geq 0.$$

Protože jsou koeficienty nezáporné, z bodové konvergence plyne omezenost koeficientů, $a_i^k \leq M$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a $0 \leq k \leq d$. Tvrzení ukážeme indukcí podle d. V případě $d = 0$ je $p_i(r) = a_i^0$ konstantní a tvrzení je triviální. Nyní provedeme indukční krok. Ukážeme, že posloupnost (a_i^d) je cauchyovská, tedy konverguje k nějakému $a^d \geq 0$. Pro polynomy $p_i(r) - a_i^d r^d$ pak použijeme indukční předpoklad a budeme hotovi.

Z trojúhelníkové nerovnosti snadno dostaneme odhad pro $i, j \in \mathbb{N}$

$$|a_i^d - a_j^d| \leq \frac{|p_i(r) - p_j(r)|}{r^d} + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_i^k - a_j^k|}{r^{d-k}} =: A_1(r) + A_2(r).$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $A_2(r) \leq M(r^{-d} + \cdots + r^{-1})$, můžeme zvolit dostatečně velké r_0 tak, aby $A_2(r_0) < \varepsilon/2$. Z cauchyovskosti posloupnosti $(p_i(r_0))$ pak existuje i_0 takové, že pro všechna $i, j \geq i_0$ je $|p_i(r_0) - p_j(r_0)| < \varepsilon/2$, tedy také $A_1(r_0) < \varepsilon/2$. Dostáváme tedy $|a_i^d - a_j^d| < \varepsilon$ pro $i, j \geq i_0$, tedy (a_i^d) je cauchyovská posloupnost. □

Důsledek 7.7. *(i) Pro $K \in \mathcal{C}^d$ je*

$$S(K) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{V(K + \varepsilon B^d) - V(K)}{\varepsilon}.$$

(ii) Zobrazení $K \mapsto S(K)$ je spojité na $\mathcal{C}^d$.

Důkaz. Buď $K \in \mathcal{C}^d$. Z definice $S(K)$ existuje posloupnost polytopů (P_i) taková, že $S(P_i) \to S(K)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $P_i \to K$ v Hausdorffově vzdálenosti, tedy také $V(P_i) \to V(K)$. Pro $\varepsilon \geq 0$ je

$$v(P_i, \varepsilon) = V(P_i) + a_i^1 \varepsilon + \cdots + a_i^d \varepsilon^d \to v(K, \varepsilon),$$

a tedy $v(K, \varepsilon) = V(K) + a^1 \varepsilon + \dots a^d \varepsilon^d$, přitom $a_i^1 \to a^1$. Z definice je $a_i^1 = s(P_i)$, a protože $a^1 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-1} V(K + \varepsilon B^d)$, vztah (i) je dokázán.

Jsou-li nyní $K_i, K \in \mathcal{C}^d$ takové, že $K_i \to K$ (v d_H), platí

$$\begin{aligned} v(K_i, \varepsilon) =& V(K_i) + S(K_i)\varepsilon + a_i^2 \varepsilon^2 + \cdots + a_i^d \varepsilon^d \\ & \to v(K, \varepsilon) = V(K) + S(K)\varepsilon + a^2 \varepsilon^2 + \cdots + a^d \varepsilon^d, \end{aligned}$$

a podle předchozího lemmatu musí $S(K_i) \to S(K)$, $i \to \infty$. □

8 Brunn-Minkowského nerovnost a její důsledky

Věta 8.1. *Nechť $K_0, K_1 \in \mathcal{C}^d$ a $\lambda \in [0,1]$. Pak*

$$V((1-\lambda)K_0 + \lambda K_1)^{\frac{1}{d}} \geq (1-\lambda) V(K_0)^{\frac{1}{d}} + \lambda V(K_1)^{\frac{1}{d}}.$$

Rovnost nastává pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ právě tehdy, když buď K_0, K_1 leží v paralelních nadrovinách, nebo když jsou homotetické (tedy $K_1 = tK_0 + z$ nebo $K_0 = tK_1 + z$ pro nějaké $t \geq 0$ a $z \in \mathbb{R}^d$).

Pozn.: Nerovnost říká, že funkce $\lambda \mapsto V(K_\lambda)^{1/d}$ je konkávní na $[0,1]$, kde $K_\lambda := (1-\lambda)K_0 + \lambda K_1$.

Důkaz - první část. (i) Nejprve si uvědomme, že ve dvou uvedených případech skutečně platí rovnost. Leží-li K_0 a K_1 v paralelních nadrovinách, pak pro nějaké $u \in S^{d-1}$ a $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ je

$$K_0 \subset \{x : \langle x, u \rangle = \alpha_0\}, \quad K_1 \subset \{x : \langle x, u \rangle = \alpha_1\}.$$

Pak ale

$$K_\lambda \subset \{x : \langle x, u \rangle = (1-\lambda)\alpha_0 + \lambda \alpha_1\},$$

tedy i K_λ má dimenzi nula a na obou stranách nerovnosti jsou tedy nuly. Jsou-li K_0, K_1 homotetické, např. $K_1 = tK_0 + z$, pak

$$K_\lambda = (1-\lambda)K_0 + \lambda(tK_0 + z) = (1 + (t-1)\lambda)K_0 + \lambda z,$$

a tedy $V_d(K_\lambda)^{1/d} = (1 + (t-1)\lambda)V_d(K_0)^{1/d}$ je lineární funkcí λ, tedy opět platí rovnost.

(ii) Uvažujme nyní případ $\dim K_0 < d$, $\dim K_1 < d$. Na pravé straně nerovnosti je 0, nerovnost tedy platí. Rovnost pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ bude platit pouze v případě, kdy $\dim K_\lambda = 0$, tedy K_λ je obsaženo v nějaké nadrovině $\{x : \langle x, u\rangle = \alpha\}$. To znamená, že pro všechna $x \in K_0$ a všechna $y \in K_1$ musí být

$$\langle (1-\lambda)x + \lambda y, u\rangle = (1-\lambda)\langle x, u\rangle + \lambda\langle y, u\rangle = \alpha,$$

tedy $\langle x, u\rangle$ musí být konstantní pro $x \in K_0$ a $\langle y, u\rangle$ musí být konstantní pro $y \in K_1$. Tedy K_0 a K_1 musí ležet v rovnoběžných nadrovinách.

(iii) Nechť nyní $\dim K_0 < d$ a $\dim K_1 = d$. Pro libovolný bod $x_0 \in K_0$ platí

$$(1-\lambda)x_0 + \lambda K_1 \subset K_\lambda,$$

tedy $V_d(K_\lambda)^{1/d} \geq \lambda V_d(K_1)^{1/d}$, nerovnost tedy platí. Jakmile má K_0 aspoň dva body, levá strana je větší a platí ostrá nerovnost. Rovnost platí právě tehdy, když je K_0 jednobodová, což je právě případ homotetie K_0 a K_1.

(iv) Nechť $\dim K_0 = \dim K_1 = d$. Ověříme nejprve, že stačí nerovnost ukázat pro případ $V_d(K_0) = V_d(K_1) = 1$. Obecná konvexní tělesa kladného objemu můžeme znormalizovat

$$\overline{K}_0 := (V_d(K_0))^{-1/d} K_0, \quad \overline{K}_1 := (V_d(K_1))^{-1/d} K_1.$$

Platí-li pro takto normalizovaná tělesa Brunn-Minkowského nerovost, pak pro

$$\overline{\lambda} := \frac{\lambda V_d(K_1)^{1/d}}{(1-\lambda)V_d(K_0)^{1/d} + \lambda V_d(K_1)^{1/d}}$$

platí

$$1 \leq V_d(\overline{K}_{\overline{\lambda}})^{1/d} = \frac{V_d(K_\lambda)^{1/d}}{(1-\lambda)V_d(K_0)^{1/d} + \lambda V_d(K_1)^{1/d}},$$

což je Brunn-Minkowského nerovnost pro K_0, K_1 a λ. □

Lemma 8.2. *Nechť $K \in \mathcal{C}^d$, $\dim K = d$, a $u \in S^{d-1}$. Označme $\alpha := -h(K, -u)$, $\beta := h(K, u)$ a $K^t := K \cap E^t := K \cap \{x : \langle x, u\rangle = t\}$. Pak funkce $v(t) := V_{d-1}(K^t)$ je spojitá a kladná pro $t \in (\alpha, \beta)$.*

Důkaz. Zvolme $\alpha < t < s < \beta$. Existují body $x_0, y_0 \in K$ takové, že $\langle x_0, u\rangle = \alpha$ a $\langle y_0, u\rangle = \beta$. Z konvexity K dostaneme

$$(1-\lambda)x_0 + \lambda K^s \subset K^t, \quad \lambda = \frac{t-\alpha}{s-\alpha},$$

a tedy $\left(\frac{t-\alpha}{s-\alpha}\right)^{d-1} v(s) \leq v(t)$. Obdobně dostaneme nerovnost $\left(\frac{\beta-s}{\beta-t}\right)^{d-1} v(t) \leq v(s)$. Pokud by $v(t) = 0$, pak by, postupným použitím obou uvedených nerovností, muselo být $v(\tau) = 0$ pro každé $\tau \in (\alpha, \beta)$, a tedy podle Fubiniovy věty $V_d(K) = \int_\alpha^\beta v(\tau)\, d\tau = 0$, což by byl spor. Je tedy $v > 0$ na (α, β). Dále z obou nerovností dostaneme vydělením odhady

$$\left(\frac{t-\alpha}{s-\alpha}\right)^{d-1} \leq \frac{v(t)}{v(s)} \leq \left(\frac{\beta-s}{\beta-t}\right)^{d-1},$$

a limitním přechodem $s \to t_+$ nebo $t \to s_-$ obdržíme spojitost v. □

Důkaz věty - druhá část. Důkaz provedeme indukcí podle dimenze d. V případě $d = 1$ samozřejmě platí rovnost (K_0 a K_1 jsou homotetické). Nechť nerovnost platí pro $d-1$ a mějme $K_0, K_1 \in \mathcal{C}^d$ s $V_d(K_0) = V_d(K_1) = 1$. Zvolme pevně $u \in S^{d-1}$ a označme

$$\begin{aligned} E^t &:= \{x : \langle x, u\rangle = t\}, \quad H^t := \{x : \langle x, t\rangle \leq t\}, \\ v_i(t) &:= V_{d-1}(K_i \cap E^t), \quad w_i(t) := V_d(K_i \cap H^t), \quad i = 0, 1, \\ \alpha_\lambda &:= -h(K_\lambda, -u), \quad \beta_\lambda := h(K_\lambda, u), \quad \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Podle Fubiniovy věty platí $w_i(t) = \int_{\alpha_i}^t v_i(s)\, ds$. Dále podle předchozího lemmatu je funkce v_i spojitá a kladná na (α_i, β_i), tedy w_i je diferencovatelná a platí $w_i'(t) = v_i(t) > 0$, $t \in (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 0, 1$. Funkce w_i je rostoucí, zobrazuje interval (α_i, β_i) na $(0, 1)$, a existuje inverzní funkce $z_i := w_i^{-1} : (0, 1) \to (\alpha_i, \beta_i)$, s derivací

$$z_i'(\tau) = \frac{1}{v_i(z_i(\tau))}, \quad \tau \in (0, 1), \quad i = 0, 1.$$

Označme dále

$$\begin{aligned} K_i(\tau) &:= K_i \cap E^{z_i(\tau)}, \quad i = 0, 1, \\ z_\lambda(\tau) &:= (1-\lambda) z_0(\tau) + \lambda z_1(\tau), \quad \tau \in (0, 1). \end{aligned}$$

Z linearity opěrné funkce plyne, že funkce z_λ zobrazuje interval $(0, 1)$ na $\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$. Z definic snadno plyne

$$K_\lambda \cap E^{z_\lambda(\tau)} \supset (1-\lambda) K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau).$$

Použitím Fubiniovy věty, substituce $t = z_\lambda(\tau)$ a výše uvedené inkluze dostaneme

$$\begin{aligned}
V_d(K_\lambda) &= \int_{\alpha_\lambda}^{\beta_\lambda} V_{d-1}(K_\lambda \cap E^t)\,dt \\
&= \int_0^1 V_{d-1}(K_\lambda \cap E^{z_\lambda(\tau)})\,z'_\lambda(\tau)\,d\tau \\
&\geq \int_0^1 V_{d-1}((1-\lambda)K_0(\tau) + \lambda K_1(\tau)) \left(\frac{1-\lambda}{v_0(z_0(\tau))} + \frac{\lambda}{v_1(z_1(\tau))}\right) d\tau.
\end{aligned}$$

Použitím indučního předpokladu a zkráceného značení $v_i = v_i(z_i(\tau))$ dostaneme

$$V_d(K_\lambda) \geq \int_0^1 \left((1-\lambda)v_0^{\frac{1}{d-1}} + \lambda v_1^{\frac{1}{d-1}}\right)^{d-1} \left(\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1}\right) d\tau.$$

Podle pomocného lemmatu níže je integrand všude větší nebo roven jedné, čímž je Brunn-Minkowského nerovnost dokázána.

Zbývá vyřešit případy rovnosti. Nechť nastane rovnost pro nějaké $\lambda \in (0,1)$. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že K_0 i K_1 mají těžiště v počátku (těžiště K je bod $t = (t_1, \dots, t_d)$ s $\int_K t_i\,dt = 0$, $i = 1, \dots, d$). Pak podle pomocného lemmatu musí být $v_0(z_0(\tau)) = v_1(z_i(\tau))$, a tedy $z'_0(\tau) = z'_1(\tau)$, pro s.v. $\tau \in (0,1)$. Je tedy $z_1(\tau) - z_0(\tau) =: C$ kostantní. Protože (substituce $z_i(\tau) = t$ a Fubiniova věta)

$$\int_0^1 z_i(\tau)\,d\tau = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} t v_i(t)\,dt = \int_{K_i} \langle x, u\rangle\,dx = 0,$$

platí $C = 0$, tedy $z_0(\tau) = z_1(\tau)$, z čehož plyne $\beta_0 = \beta_1$, neboli $h(K_0, u) = h_(K_1, u)$. Protože stejný postup lze použít pro každý $u \in S^{d-1}$, platí $h(K_0, \cdot) = h(K_1, \cdot)$, a tedy $K_0 = K_1$. $\square$

Lemma 8.3. *Pro* $v_0, v_1, p > 0$ *a* $\lambda \in (0,1)$ *platí*

$$((1-\lambda)v_0^p + \lambda v_1^p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1}\right) \geq 1,$$

přitom rovnost pro nějaké $\lambda \in (0,1)$ *nastane právě tehdy, když* $v_0 = v_1$.

Důkaz. Zlogaritmováním a využitím konkávnosti logaritmu dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\ln\left((1-\lambda)v_0^p + \lambda v_1^p\right) + \ln\left(\frac{1-\lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1}\right) \\
\geq& (1-\lambda)\ln v_0 + \lambda \ln v_1 + (1-\lambda)(-\ln v_0) + \lambda(-\ln v_1) = 0,
\end{aligned}$$

tedy nerovnost platí. Protože logaritmus je ryze konkávní, rovnost nastane pouze když $v_0 = v_1$. $\square$

Definice 8.1. Je-li $K \in \mathcal{C}^d$ značíme

$$S_0(K) := \frac{K - K}{2} = \left\{ \frac{x - y}{2} : x, y \in K \right\}$$

středovou symetrizaci K.

Důsledek 8.4. *Pro všechna konvexní tělesa* K *platí*

$$V(S_0 K) \geq V(K).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když buď $\dim K < d$*, nebo* K *je středově symetrické (tedy* $-K = K + z$ *pro nějaké* $z \in \mathbb{R}^d$*).*

Důkaz. Uvedená nerovnost je přímým důsledkem Brunn-Minkowského nerovnosti pro $K_0 = K$, $K_1 = -K$ a $\lambda = \frac{1}{2}$. Zbývá ověřit případy rovnosti. Víme, že rovnost v BM nerovnosti nastává právě tehdy, když K a $-K$ leží v paralelních nadrovinách, což je právě tehdy, když $\dim K < d$, nebo když K a $-K$ jsou homotetické, tedy $-K = \alpha K + z$ pro nějaké $\alpha \geq 0$ a $z \in \mathbb{R}^d$. Porovnáním objemů snadno zjistíme, že $\alpha = 1$, tedy $-K = K + z$. $\square$

Lemma 8.5. $\operatorname{diam} S_0(K) = \operatorname{diam} K$.

Důkaz. Množina $S_0(K)$ je zřejmě středově souměrná, a tedy nejdelší úsečka ležící v $S_0(K)$ má střed v počátku. Je tedy

$$\operatorname{diam} S_0(K) = 2 \max_{z \in S_0(K)} \|z\| = \max_{x,y \in K} \|x - y\| = \operatorname{diam} K.$$

$\square$

Symbolem $\omega_d := \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2} + 1)$ značíme objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$.

Důsledek 8.6 (Izodiametrická nerovnost)**.** *Pro* $K \in \mathcal{C}^d$ *platí*

$$V(K) \leq \omega_d \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2} \right)^d.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když K *je koule.*

Důkaz. Protože $S_0(K)$ je středově souměrná, platí

$$S_0(K) \subset B\left(0, \frac{\operatorname{diam} S_0(K)}{2}\right),$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $S_0(K)$ je koule. S využitím této inkluze, předchozího lemmatu a Důsledku 8.4 dostaneme

$$\omega_d \left(\frac{\operatorname{diam} K}{2}\right)^d = \omega_d \left(\frac{\operatorname{diam} S_0(K)}{2}\right)^d \geq V(S_0(K)) \geq V(K),$$

což je dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane právě tehdy, když $S_0(K)$ je koule a zároveň buď $\dim K < d$, nebo $-K = K + z$. Pokud $\dim K < d$, pak i $\dim S_0(K) < d$, a tedy tento případ nemůže nastat. Pro $r = \frac{1}{2} \operatorname{diam} S_0(K)$ tedy v případě rovnosti platí pro všechna $u \in S^{d-1}$

$$\begin{aligned} r = h(S_0(K), u) &= \frac{1}{2}(k(K, u) + h(-K, u)) = \frac{1}{2}(h(K, u) + h(K, u) + \langle z, u \rangle) \\ &= h(K, u) + \left\langle \frac{z}{2}, u \right\rangle, \end{aligned}$$

tedy

$$h(K, u) = r - \left\langle \frac{z}{2}, u \right\rangle = h\left(B\left(-\frac{z}{2}, r\right), u\right), \quad u \in S^{d-1}.$$

Z jednoznačnosti opěrné funkce tedy plyne $K = B(-\frac{z}{2}, r)$. □

Důsledek 8.7 (Izoperimetrická nerovnost)**.** *Pro $K \in \mathcal{C}^d$ platí*

$$S(K) \geq d\omega_d^{\frac{1}{d}} V(K)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když K je koule.

Poznámka 8.1. *Pro $d = 2$ dostaneme klasický vztah mezi délkou obvodu L a plošným obsahem A*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Důkaz. Použijeme BM nerovnost pro $K_0 = K$, $K_1 = B$ (jednotková koule). Pro $K_\lambda := (1 - \lambda)K + \lambda B$ je tedy funkce

$$f : \lambda \mapsto V(K_\lambda)^{\frac{1}{d}} - (1 - \lambda)V(K)^{\frac{1}{d}} - \lambda\omega_d^{\frac{1}{d}}$$

nezáporná a konkávní na intervalu $[0, 1]$. Protože $f(0) = f(1) = 0$, musí být derivace f zprava v nule nezáporná, pokud existuje. Jest

$$f'_+(0) = \frac{1}{d} V(K)^{\frac{1}{d}-1} \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0_+} V(K_\lambda) + V(K)^{\frac{1}{d}} - \omega_d^{\frac{1}{d}}.$$

Protože

$$V(K_\lambda) = V\left((1-\lambda)(K + \frac{\lambda}{1-\lambda}B)\right) = (1-\lambda)^d V(K + \frac{\lambda}{1-\lambda}B),$$

je

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0_+} V(K_\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0_+}(1-\lambda)^d\, V(K) + 1 \cdot \lim_{\lambda\to 0_+} \frac{V(K + \frac{\lambda}{1-\lambda}B) - V(K)}{\lambda},$$

a použitím Důsledku 7.7 je pak

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0_+} V(K_\lambda) = -d\,V(K) + S(K).$$

Dosazením pak dostaneme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \frac{1}{d}V(K)^{\frac{1}{d}-1}(-dV(K) + S(K)) + V(K)^{\frac{1}{d}} - \omega_d^{\frac{1}{d}} \\ &= \frac{1}{d}V(K)^{\frac{1}{d}-1}S(K) - \omega_d^{\frac{1}{d}}, \end{aligned}$$

a vlastnost $f'_+(0) \geq 0$ dává izoperimetrickou nerovnost. Platí-li rovnost, tedy $f'_+(0) = 0$, musí být funkce $f(\lambda)$ konstantně rovna nule na $[0,1]$, tedy platí rovnost v BM nerovnosti pro K a B, a tedy K a B musí být homotetické, tedy K je koule. $\square$