Přednáška 6.3.2020

Věta 2.10. *Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I a nechť pro všechna $x, y \in I$ existuje* (R) $\int_x^y f$. *Zvolme pevně bod $a \in I$ a označme $F(x) =$ (R) $\int_a^x f$. Pak*

(i) *funkce F je spojitá na I;*
(ii) *je-li funkce f spojitá v bodě x, platí $F'(x) = f(x)$;*
(iii) *pro libovolný interval $[x, y] \subseteq I$ platí* (R) $\int_x^y f = F(y) - F(x)$.

[Důkaz]

Věta 2.11. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, existuje* (R) $\int_a^b f$.

[BEZ DŮKAZU]

Důsledek 2.12. (1) *Každá spojitá funkce má primitivní funkci.*
(2) *Je-li funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, existují Riemannův i Newtonův integrál z f rovnají se.*

Věta 2.13 (První věta o střední hodnotě). *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť $g \geq 0$ na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

[Důkaz]

Věta 2.14 (Druhá věta o střední hodnotě). *Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, nechť g je monotónní a existuje spojitá derivace g' na $[a, b]$. Pak existuje $c \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f.$$

[Důkaz]

Konvergence Newtonova integrálu. Buď funkce f spojitá na intervalu (a, b). Pak existence (konvergence) Newtonova integrálu $\int_a^b f$ je dána existencí vlastních limit primitivní funkce, $F(a_+)$ a $F(b_-)$. (Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, Newtonův integrál samozřejmě existuje.)

Pozn.: Bolzano-Cauchyova podmínka pro existenci vlastní limity funkce dává následující kriterium: Newtonův integrál ze spojité funkce f na intervalu $[a, b)$ konverguje právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists v < b)(\forall x, y \in (v, b)) \ \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon.$$

(Analogicky pro funkci spojitou na intervalu $(a, b]$.)

Příklad: $\int_0^1 x^a \, dx$ konverguje $\iff a > -1$. $\int_1^\infty x^a \, dx$ konverguje $\iff a < -1$.

Tvrzení 2.15. *Je-li f spojitá a omezená na omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f$ konverguje.*

Věta 2.16 (Srovnávací kriterium pro konvergenci intergrálu). *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a, b)$ a nechť $f \leq g$ na $[a, b)$. Jestliže $\int_a^b g$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

[Důkaz]

Věta 2.17 (Limitní srovnávací kriterium pro konvergenci intergrálu)**.** *Nechť* f *a* g *jsou nezáporné funkce spojité na intervalu* $[a, b)$ *a nechť existuje* $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$. *Pak*

(a) $c \in (0, \infty) \implies [\int_a^b f$ konverguje $\iff \int_a^b g$ konverguje $]$.
(b) $c = 0 \implies [\int_a^b g$ konverguje $\implies \int_a^b f$ konverguje $]$.
(c) $c = \infty \implies [\int_a^b g$ diverguje $\implies \int_a^b f$ diverguje $]$.

Pozn.: Analogická kriteria platí pro funkce spojité na intervalu $(a, b]$.
Příklad: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje, ale $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverguje.