

Ukázka zadání zkoušky z G2

ZS 2025/26

Početní část

1. Určete povrch části zeměkoule (kterou pro zjednodušení považujeme za kouli o poloměru R) vymezený poledníky 0° a 30° východní délky a rovnoběžkami 45° a 60° severní šířky.
2. Je dána množina

$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq r^2, y + z = 0\}.$$

- (a) Ukažte, že S je 2-plocha s krajem.
- (b) Vnitřek plochy S je orientován normálovým vektorem n s vlastností $\langle n, e_3 \rangle > 0$. Popište kraj plochy ∂S a jeho indukovanou orientaci.
- (c) Spočítejte pomocí Stokesovy věty

$$\int_{\partial S} (x - y)dz + (y - z)dx + (z - x)dy.$$

3. Je dána funkce

$$\varphi : (u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Ukažte, že φ je mapa.
- (b) Najděte první a druhou fundamentální formu a normálu plochy $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ v obecném bodě.
- (c) Najděte hlavní křivosti plochy v bodě $u = v = 1$.

90 minut

maximálně 10 bodů za každý příklad, požadované minimum je 15 bodů celkem

Teoretická část

1. Definujte k -plochu a zobecněnou k -plochu v $\mathbb{R}^n$.
2. Definujte druhou fundamentální formu plochy v $\mathbb{R}^3$ a ukažte, že je symetrická.
3. Vyslovte a dokažte větu o vlastnostech de Rhamova diferenciálu $d\omega$ diferenciální formy $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$.
4. Rozhodněte, zda platí (dokažte nebo vyvraťte): Jsou-li $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ k -mapa a $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mapa, pak

$$\Phi : (u, v) \mapsto (\varphi(u), \psi(v)), \quad (u, v) \in U \times V$$

je $(k + l)$ -mapa v $\mathbb{R}^{m+n}$?

60 minut

Bodování: maxima 5/7/10/8 bodů, požadováno minimálně 15 bodů celkem.

Výsledná známka: 50-60 bodů: **1**, 40-49 bodů: **2**, 30-39 bodů: **3**