Geometrie 2
ZS 2025/26

Jan Rataj

2. října 2025

1. přednáška 2.10.2025

0 Úvod

Přednáška bude mít tyto tři části:

1. Plochy v $\mathbb{R}^n$, tečný prostor, míra na plochách, plošný integrál prvního druhu, Gaussova-Ostrogradského věta.
2. Diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$, integrace diferenciálních forem, Stokesova věta.
3. Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: hlavní směry a hlavní křivosti plochy, Gaussova a střední křivost, geodetiky.

Připomeňme dvě důležité věty z Matematické analýzy, které budeme opakovaně používat. Pro totální diferenciál zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ budeme používat značení $Df(u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(u \in U)$.

Pozn.: *Okolím* bodu p v metrickém prostoru X budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ obsahující bod p.

Věta 0.1 (Věta o implicitních funkcích)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a bod $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ nechť splňuje $F(x_0, y_0) = 0$ a*

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)\right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu x_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu y_0 taková, že $U \times V \subset G$, a existuje zobrazení $g : U \to V$ třídy C^m takové, že pro každé $x \in U$, $F(x, g(x)) = 0$ a $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.

Věta 0.2 (Věta o inverzním zobrazení, či o lokálním difeomorfismu)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a $x_0 \in U$ takový, že matice $Dg(x_0)$ je regulární. Pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu x_0 takové, že $V_0 := g(U_0)$ je otevřená množina a $g|U_0 : U_0 \to V_0$ je difeomorfismus třídy C^m (tedy prosté zobrazení a $(g|U_0)^{-1}$ je třídy C^m).*

1 Plošný integrál prvního druhu

1.1 Plochy v $\mathbb{R}^n$

Definice 1.1. (i) *Parametrizovanou k-plochou* třídy C^m rozumíme zobrazení $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ třídy C^m definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^k$ a splňující $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, $u \in U$. Neuvedeme-li konkrétní třídu hladkosti C^m, budeme vždy mít na mysli hladkost třídy C^∞.

(ii) Parametrizovanou k-plochu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme *k-mapou*, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Příklady:

1. Regulární parametrizovaná křivka $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ je parametrizovanou 1-plochou.
2. Zobrazení
$$\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0,\ v \in \mathbb{R},$$
je parametrizovaná 2-plocha, ale ne mapa.
3. Ani prostá parametrizovaná plocha nemusí být mapou (příklad bude na cvičení).

Tvrzení 1.1 (Graf funkce je mapa)**.** *Je-li $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m $(m \geq 1)$, pak zobrazení*
$$\varphi : u \mapsto (u, f(u))$$
je k-mapa třídy C^m (v $\mathbb{R}^n$).

Důkaz. Je zřejmé, že φ je prosté, třídy C^m a $\operatorname{rank} D\varphi = k$ na U. Zbývá ukázat, že φ^{-1} je spojité na $\varphi(U)$. φ^{-1} je ovšem restrikcí projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic, tedy jako restrikce spojitého zobrazení je též spojité. $\square$

Věta 1.2 (Parametrizovaná plocha je lokálně mapou)**.** *Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ třídy C^m $(m \geq 1)$. Pak platí:*

(i) Je-li $u \in U$ takový, že $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že restrikce $\varphi|U_0$ je k-mapa třídy C^m.

(ii) Je-li $U_0 \subset U$ omezená otevřená podmnožina taková, že $\overline{U_0} \subset U$, φ je prosté na U_0, $\operatorname{rank} D\varphi = k$ na U_0 a $\varphi(U_0) \cap \varphi(\partial U_0) = \emptyset$, pak $\varphi|U_0$ je k-mapa třídy C^m.

Důkaz. (i) Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, je aspoň jedna čtvercová podmatice $D\varphi(u)$ regulární (to je důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{k}$ je regulární. Pak zobrazení $h : u \mapsto$

$(\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u))$ z U do $\mathbb{R}^k$ má regulární diferenciál v bodě u, a podle věty o inverzním zobrazení je tedy na okolí u difeomorfismem, speciálně tedy je $\operatorname{rank} Dh = k$ na U_0 a $h|U_0$ je homeomorfismus. Pak zřejmě i $\operatorname{rank} D\varphi = k$ na U_0 a $\varphi|U_0$ je homeomorfismus, tedy $\varphi|U_0$ je k-mapa.

(ii) Potřebujeme ukázat, že $(\varphi|U_0)^{-1}$ je spojité na $\varphi(U_0)$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že existuje posloupnost $x_i = \varphi(u_i) \in \varphi(U_0)$, $x_i \to x_0 = \varphi(u_0)$, a přitom $u_i \not\to u_0$. Množina U_0 je omezená, tedy existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \to u' \in \overline{U_0}$, $u' \neq u_0$. Ze spojitosti φ plyne $\varphi(u_{\sigma(i)}) = x_{\sigma(i)} \to \varphi(u')$, tedy $\varphi(u') = \varphi(u_0)$. Dále podle předpokladu musí ležet i $u' \in U_0$, a protože φ je prosté na U_0 dostáváme $u' = u_0$, tedy spor. $\square$

Příklad - mapa sféry: Zobrazení

$$\varphi : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

je 2-mapa na $(-\pi + C, \pi + C) \times (-\pi/2, \pi/2)$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (plocha)**.** Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *k-plochou* (třídy C^m), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí bodu x a k-mapa (třídy C^m) $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Řekneme pak, že každá taková mapa ϕ je mapou plochy S. Speciálně obraz $\operatorname{im} \varphi = \varphi(U)$ jedné k-mapy φ nazveme *jednoduchou k-plochou.*

Pozn.: Podle definice je tedy obraz $\operatorname{im} \varphi$ mapy φ plochy S relativně otevřenou podmnožinou plochy S.

Definice 1.3 (atlas plochy)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, pak libovolný soubor $\mathcal{A}$ map plochy S s vlastností $S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \operatorname{im} \varphi$ nazveme *atlasem* plochy S.

Příklady:

1. Graf funkce $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^1 je jednoduchou k-plochou.
2. Množina $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$,
$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$
$\operatorname{dom} \varphi_1 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$, $\operatorname{dom} \varphi_2 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.

Věta 1.3 (Implicitně zadaná plocha)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m. Nechť v každém bodě $x \in f^{-1}(\{0\})$ platí* $\operatorname{rank} Df(x) = n-k$. *Pak $f^{-1}\{0\}$ je k-plocha třídy C^m.*

Důkaz. Nechť $a \in f^{-1}(\{0\})$. Protože $\operatorname{rank} Df(a) = n - k$, existuje regulární čtvercová submatice $Df(a)$ o $n - k$ řádcích (důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, j=k+1}^{n-k, n}$$

je regulární. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu $(a_1, \dots, a_k)$, okolí V bodu $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ a C^m zobrazení $g : U \to V$ takové, že $g(a_1, \dots, a_k) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$ a

$$\operatorname{graf} g := \{(u, g(u)) : u \in U\} = f^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Tedy $f^{-1}(\{0\})$ je k-plocha. $\square$

Příklady:

1. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$,

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

je $(n-1)$-plocha.

2. Množina

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1,\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.

Je-li L lineární podprostor $\mathbb{R}^n$, pak symbolem $L^\perp$ budeme značit ortogonální podprostor k L ($L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v\rangle = 0,\, u \in L\}$).

Věta 1.4 (plochu lze lokálně parametrizovat jako graf funkce)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha třídy C^m $(m \geq 1)$. Pak ke každému bodu $x \in S$ existuje okolí V (v $\mathbb{R}^n$), k-rozměrný podprostor $L \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset L$ otevřená a zobrazení $h : W \to L^\perp$ takové, že*

$$\operatorname{graf} h := \{w + h(w) : w \in W\} = S \cap V.$$

Důkaz. Podle definice k-plochy k danému bodu $x \in S$ existuje k-mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ třídy C^m taková, že $\varphi(U)$ je relativně otevřená podmnožina S a $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, má $D\varphi(u)$ (podle Cauchy-Binetova vzorce) regulární čtvercovou podmatici $k \times k$, tedy existuje $I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = k$, tak, že

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i \in I, 1 \leq j \leq k}$$

je regulární matice. Označme $L := \operatorname{Lin}\{e_i : i \in I\}$, Π nechť je ortogonální projekce z $\mathbb{R}^n$ do L, a $v := \Pi(x)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi$ splňuje předpoklady věty o inverzním zobrazení, tedy existuje $U_0 \subset U$ otevřená, $u \in U_0$, taková, že $W := g(U_0) \subset L$ je otevřená a $g : U_0 \to W$ je difeomorfismus třídy C^m. Položme

$$h : w \mapsto \varphi \circ g^{-1}(w) - w, \quad w \in W.$$

Zřejmě $h : W \to L^\perp$ je třídy C^m a

$$\{w + h(w) : w \in W\} = \varphi(U_0)$$

je relativně otevřená podmnožina S (neboť φ je homeomorfismus), tedy $\varphi(U_0) = S \cap V$ pro nějakou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

Definice 1.4. *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je* lokálně uzavřená, *jestliže $A = F \cap G$ pro nějakou $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou a $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřenou.*

Pozn.: Každá lokálně uzavřená množina je Borelovská. Dále platí: A je lokálně uzavřená právě tehdy, když A je relativně otevřená v uzávěru $\overline{A}$ (cvičení).

Tvrzení 1.5 (lokální uzavřenost plochy)**.** *Každá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ je lokálně uzavřená.*

Důkaz. Ukážeme, že ke každému bodu $x \in S$ existuje k-mapa $\varphi_x : U_x \to S$ taková, že $x \in \varphi_x(U_x)$ a $\varphi_x(U_x) = \overline{S} \cap V_x$ pro nějakou $V_x \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Pak platí

$$S = \left(\bigcup_{x \in S} V_x \right) \cap \overline{S},$$

tedy S je lokálně uzavřená.

Ke každému $x \in S$ existuje k-mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Buď U_x omezená otevřená množina obsahující u a taková, že $\overline{U_x} \subset U$. Pak $\varphi_x := \varphi | U_x$ je k-mapa a tedy existuje $V_x \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\varphi_x(U_x) = V_x \cap S$. Ukážeme, že $V_x \cap S = V_x \cap \overline{S}$, tedy že φ_x je hledaná k-mapa. Nechť $x_0 \in V_x \cap \overline{S}$. Pak existuje posloupnost $x_i \in V_x \cap S$, $x_i \to x_0$, $x_i = \varphi(u_i)$, $u_i \in U_x$. Protože $\overline{U_x}$ je kompaktní, můžeme (přechodem k podposloupnosti) předpokládat, že $u_i \to u_0 \in \overline{U_x}$. Pak ($\varphi$ je spojité) platí $x_i = \varphi(u_i) \to \varphi(u_0)$, a tedy $x_0 = \varphi(u_0)$, tedy nutně $x_0 \in S$. $\square$