Geometrie 2
LS 2022/23

Jan Rataj

27. května 2024

Přednáška 14.2.2023

0 Úvod

Přednáška bude mít tyto tři části:

1. Plochy v $\mathbb{R}^n$, tečný prostor, míra na plochách, plošný integrál prvního druhu, Gaussova-Ostrogradského věta.
2. Diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$, integrace diferenciálních forem, Stokesova věta.
3. Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: hlavní směry a hlavní křivosti plochy, Gaussova a střední křivost, geodetiky.

Připomeňme dvě důležité věty z Matematické analýzy, které budeme opakovaně používat. Pro totální diferenciál zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ budeme používat značení $Df(u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(u \in U)$.

Pozn.: *Okolím* bodu p v metrickém prostoru X budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ obsahující bod p.

Věta 0.1 (Věta o implicitních funkcích)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a bod $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ nechť splňuje $F(x_0, y_0) = 0$ a*

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu x_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu y_0 taková, že $U \times V \subset G$, a existuje zobrazení $g : U \to V$ třídy C^m takové, že pro každé $x \in U$, $F(x, g(x)) = 0$ a $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.

Věta 0.2 (Věta o inverzním zobrazení)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^m $(m \geq 1)$ a $x_0 \in U$ takový, že matice $Dg(x_0)$ je regulární. Pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu x_0 takové, že $V_0 := g(U_0)$ je otevřená množina a $g|U_0 : U_0 \to V_0$ je difeomorfismus třídy C^m (tedy prosté zobrazení a $(g|U_0)^{-1}$ je třídy C^m).*

1 Plošný integrál prvního druhu

1.1 Plochy v $\mathbb{R}^n$

Definice 1.1. (i) *Parametrizovanou k-plochou* (třídy C^m) rozumíme zobrazení $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ třídy C^m definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^k$ a splňující $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, $u \in U$. Neuvedeme-li konkrétní třídu hladkosti C^m, budeme vždy mít na mysli hladkost třídy C^∞.

(ii) Parametrizovanou k-plochu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ nazveme *k-mapou*, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Příklady:

1. Regulární parametrizovaná křivka $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ je parametrizovanou 1-plochou.

2. Zobrazení
$$\varphi : (u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u), \quad u > 0,\ v \in \mathbb{R},$$
je parametrizovaná 2-plocha, ale ne mapa.

3. Ani prostá parametrizovaná plocha nemusí být mapou (příklad bude na cvičení).

Tvrzení 1.1 (Graf funkce je mapa)**.** *Je-li $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m $(m \geq 1)$, pak zobrazení*
$$\varphi : u \mapsto (u, f(u))$$
je k-mapa třídy C^m (v $\mathbb{R}^n$).

Důkaz. Je zřejmé, že φ je prosté, třídy C^m a $\operatorname{rank} D\varphi = k$ na U. Zbývá ukázat, že φ^{-1} je spojité na $\varphi(U)$. φ^{-1} je ovšem restrikcí projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic, tedy jako restrikce spojitého zobrazení je též spojité. □

Věta 1.2 (Parametrizovaná plocha je lokálně mapou)**.** *Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ parametrizovaná k-plocha. Pak platí:*

(i) Pro každý bod $u \in U$ existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že restrikce $\varphi|U_0$ je prosté zobrazení.

(ii) Je-li $U_0 \subset U$ omezená otevřená podmnožina taková, že $\overline{U_0} \subset U$, φ je prosté na U_0 a $\varphi(U_0) \cap \varphi(\partial U_0) = \emptyset$, pak $\varphi|U_0$ je k-mapa.

Důkaz. (i) Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, je aspoň jedna čtvercová podmatice $D\varphi(u)$ regulární (to je důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Pak zobrazení $u \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u))$ z U do $\mathbb{R}^k$ má regulární diferenciál v bodě u, a podle věty o inverzním zobrazení je tedy na okolí u difeomorfismem, speciálně tedy prosté. Pak i φ je prosté na tomto okolí.

(ii) Potřebujeme ukázat, že $(\varphi|U_0)^{-1}$ je spojité na $\varphi(U_0)$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že existuje posloupnost $x_i = \varphi(u_i) \in \varphi(U_0)$, $x_i \to x_0 = \varphi(u_0)$, a přitom $u_i \not\to u_0$. Množina U_0 je omezená, tedy existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \to u' \in \overline{U_0}$, $u' \neq u_0$. Ze spojitosti φ plyne $\varphi(u_{\sigma(i)}) = x_{\sigma(i)} \to \varphi(u')$, tedy $\varphi(u') = \varphi(u_0)$. Dále podle předpokladu musí ležet i $u' \in U_0$, a protože φ je prosté na U_0 dostáváme $u' = u_0$, tedy spor. □

Příklad: Zobrazení $\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u)$ je 2-mapa na $(0, K) \times (-\pi, \pi)$ pro libovolné $K > 0$.

Definice 1.2 (plocha)**.** Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *k-plochou* (třídy C^m), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí bodu x a k-mapa (třídy C^m) $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Řekneme pak, že každá taková mapa ϕ je mapou plochy S. Speciálně obraz $\operatorname{im} \varphi = \varphi(U)$ jedné k-mapy φ nazveme *jednoduchou k-plochou.*

Pozn.: Podle definice je tedy obraz $\operatorname{im} \varphi$ mapy φ plochy S relativně otevřenou podmnožinou plochy S.

Definice 1.3 (atlas plochy)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, pak libovolný soubor $\mathcal{A}$ map plochy S s vlastností $S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \operatorname{im} \varphi$ nazveme *atlasem* plochy S.

Příklady:

1. Graf funkce $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^1 je jednoduchou k-plochou.
2. Množina $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$,
$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$
$\operatorname{dom} \varphi_1 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$, $\operatorname{dom} \varphi_2 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.

Přednáška 21.2.2023

Věta 1.3 (Implicitně zadaná plocha)**.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $f : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m. Nechť v každém bodě $x \in f^{-1}(\{0\})$ platí* $\operatorname{rank} Df(x) = n-k$. *Pak $f^{-1}\{0\}$ je k-plocha třídy C^m.*

Důkaz. Nechť $a \in f^{-1}(\{0\})$. Protože $\operatorname{rank} Df(a) = n - k$, existuje regulární čtvercová submatice $Df(a)$ o $n - k$ řádcích (důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i=1,j=k+1}^{n-k,n}$$

je regulární. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu $(a_1, \dots, a_k)$, okolí V bodu $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ a C^1 zobrazení $g : U \to V$ takové, že $g(a_1, \dots, a_k) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$ a

$$\operatorname{graf} g := \{(u, g(u)) : \, u \in U\} = f^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Tedy $f^{-1}(\{0\})$ je k-plocha. □

Příklady:

1. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$,
$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \, \|x\| = 1\},$$
je $(n-1)$-plocha.
2. Množina
$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \, \|x\| = 1, \, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.

Je-li L lineární podprostor $\mathbb{R}^n$, pak symbolem $L^\perp$ budeme značit ortogonální podprostor k L ($L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \, \langle u, v\rangle = 0, \, u \in L\}$).

Věta 1.4 (plochu lze lokálně parametrizovat jako graf funkce)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha třídy C^m $(m \geq 1)$. Pak ke každému bodu $x \in S$ existuje okolí V (v $\mathbb{R}^n$), k-rozměrný podprostor $L \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset L$ otevřená a zobrazení $h : W \to L^\perp$ takové, že*

$$\operatorname{graf} h := \{w + h(w) : \, w \in W\} = S \cap V.$$

Důkaz. Podle definice k-plochy k danému bodu $x \in S$ existuje k-mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ třídy C^m taková, že $\varphi(U)$ je relativně otevřená podmnožina S a $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Protože $\operatorname{rank} D\varphi(u) = k$, má $D\varphi(u)$ (podle Cauchy-Binetova vzorce) regulární čtvercovou podmatici $k \times k$, tedy existuje $I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = k$, tak, že

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i \in I, 1 \leq j \leq k}$$

je regulární matice. Označme $L := \mathrm{Lin}\{e_i : i \in I\}$, Π nechť je ortogonální projekce z $\mathbb{R}^n$ do L, a $v := \Pi(x)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi$ splňuje předpoklady věty o inverzním zobrazení, tedy existuje $U_0 \subset U$ otevřená, $u \in U_0$, taková, že $W := g(U_0) \subset L$ je otevřená a $g : U_0 \to W$ je difeomorfismus třídy C^m. Položme

$$h : w \mapsto \varphi \circ g^{-1}(w) - w, \quad w \in W.$$

Zřejmě $h : W \to L^\perp$ je třídy C^m a

$$\{w + h(w) : w \in W\} = \varphi(U_0)$$

je relativně otevřená podmnožina S (neboť φ je homeomorfismus), tedy $\varphi(U_0) = S \cap V$ pro nějakou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$. □

Tvrzení 1.5 (lokální uzavřenost plochy)**.** *Každá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ je* lokálně uzavřená *množina, tedy lze ji vyjádřit jako průnik otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Ekvivalentně lze říci, že S je relativně otevřená ve svém uzávěru $\overline{S}$. Speciálně je tedy k-plocha borelovská podmnožina $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Ukážeme, že S je relativně otevřená v uzávěru $\overline{S}$. Nechť $x \in S$ a $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ je k-mapa taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Zvolme omezené otevřené okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že $\overline{U_0} \subset U$. Protože φ je homeomorfismus, je $\varphi(U_0)$ otevřená v $\varphi(U)$, což je otevřená podmnožina S, tedy $\varphi(U_0)$ je relativně otevřená podmnožina S, a platí tedy $\varphi(U_0) = V \cap S$ pro nějakou $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Ukážeme, že

$$\overline{S} \cap V = S \cap V,$$

z čehož už plyne, že $\varphi(U_0)$ je relativně otevřená v $\overline{S}$.

Nechť pro spor existuje $y \in (\overline{S} \setminus S) \cap V$. Pak existuje posloupnost prvků $x_i \in S \cap V$, $x_i \to y$, přitom nutně $x_i = \varphi(u_i)$ pro nějaké $u_i \in U_0$. Z kompaktnosti $\overline{U_0}$ existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \to u_0 \in \overline{U_0} \subset U$, tedy ze spojitosti φ

$$x_{\sigma(i)} = \varphi(u_{\sigma(i)}) \to \varphi(u_0) = y,$$

tedy $y \in \mathrm{im}\,\varphi \subset S$, což je spor. □

1.2 Křivky na ploše a tečný prostor

Pod *regulární parametrizovanou křivkou* na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $c : I \to M$ třídy C^1 definované na intervalu I a splňující $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Tvrzení 1.6 (o křivce na ploše)**.** *Buďte $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa a $c : I \to \varphi(U)$ regulární parametrizovaná křivka na jednoduché k-ploše $\varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \to U$ je regulární parametrizovaná křivka v U a platí $c = \varphi \circ u$.*

Důkaz. Zobrazení $u = \varphi^{-1} \circ c$ je zřejmě spojité na intervalu I. Ukážeme, že u je třídy C^1. Zvolme $t_0 \in I$ a označme $x_0 := c(t_0)$, $u_0 := \varphi^{-1}(x_0)$ a $\varphi =$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Protože rank $D\varphi(u_0) = k$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u_0)\right)_{i,j=1}^{k}$ je regulární. Označme $\Pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ projekci do prvních k souřadnic a $v_0 := \Pi(x_0)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 a $Dg(u_0)$ je regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení existuje inverzní zobrazení g^{-1} definované na nějakém okolí V bodu v_0, platí přitom $g^{-1} \circ \Pi = \varphi^{-1}$ na $\varphi(U) \cap \Pi^{-1}(V)$. Pro všechna $t \in (\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$ je pak

$$u(t) = \varphi^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

tedy u je třídy C^1 na $(\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$, což je okolí bodu t_0. $\square$

Pozn.: Ze vztahu $c = \varphi \circ u$ plyne

$$c'(t) = D\varphi(u(t))(u'(t)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t))u_i'(t),\ t \in I.$$

Definice 1.4. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je *tečným vektorem* k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in S$, jestliže $v = 0$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S a bod $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě $x \in S$ značíme T_xS.

Přednáška 28.2.2023

Věta 1.7 (popis tečných vektorů plochy)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $x \in S$, pak T_xS je k-rozměrný lineární podprostor $\mathbb{R}^n$. Je-li navíc $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to S$ mapa plochy S s vlastností $\varphi(u) = x$ pro nějaký $u \in U$, pak*

$$T_xS = \operatorname{Lin}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)\right\} \tag{1}$$

a $D\varphi(u)$ zobrazuje bijektivně $\mathbb{R}^k$ na T_xS.

Úmluva: Budeme používat symbol $d\varphi(u)$ pro bijekci $\mathbb{R}^k \to T_xS$.

Důkaz. Stačí ukázat rovnost (1) (protože parciální derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé).

(a) Nechť $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u)$ pro nějaké $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$. Uvažujme křivku

$$c(t) := \varphi(u_1 + \alpha_1 t, \dots, u_k + \alpha_k t), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta > 0$ je tak malé, aby argument ležel v definičním oboru mapy φ. Pak c je zřejmě regulární parametrizovaná křivka na ploše S a platí $c(0) = x$ a $c'(0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u)$.

(b) Nechť $c : I \to S$ je regulární parametrizovaná křivka, $c(t_0) = x$. Předpokládejme, že celý obraz křivky c leží v obrazu k-mapy φ. Pak podle předchozího tvrzení $c = \varphi \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u = \varphi^{-1} \circ c$, a tedy

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u(t_0))u_i'(t_0).$$

□

Věta 1.8 (změna parametrů plochy)**.** *Buďte $\varphi : U \to S$, $\psi : V \to S$ dvě mapy plochy S takové, že $M := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(M) \to \psi^{-1}(M)$ je C^1 difeomorfismus a pro $\varphi(u) = \psi(v) \in M$ platí*

$$D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u).$$

Důkaz. Buď $x = \varphi(u) = \psi(v) \in M$ (pro vhodné $u \in U$ a $v \in V$). Označme Π kolmou projekci z $\mathbb{R}^n$ do lineárního podprostoru T_xS a $g := \Pi \circ \varphi$, $h := \Pi \circ \psi$ (tedy $g : U \to \mathbb{R}^k$, $h : V \to \mathbb{R}^k$). Diferenciály $Dg(u)$ a $Dh(v)$ jsou regulární, tedy g, resp. h, jsou C^1 difeomorfismy na nějakém okolí bodu u, resp. v. Tedy i $h^{-1} \circ g = \psi^{-1} \circ \varphi$ je C^1 difeomorfismus na okolí bodu u. Protože $\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$, musí být

$$D\varphi(u) = D\psi(\psi^{-1}(\varphi(u)) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u),$$

tedy i $d\varphi(u) = d\psi(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$, z čehož už plyne

$$(d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u) = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u).$$

□

Definice 1.5. Řekneme, že zobrazení $\Phi : S \to \mathbb{R}^m$ definované na k-ploše S třídy C^m je *diferencovatelné* (třídy C^m), jestliže pro každou k-mapu $\varphi : U \to S$ je $\Phi \circ \varphi$ třídy C^m. Je-li $\varphi : U \to S$ k-mapa a $x = \varphi(u)$, definujeme *diferenciál* zobrazení Φ v bodě x jako

$$D\Phi(x) := D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1}.$$

Pozn.:

1. $D\Phi(x)$ je lineární zobrazení z T_xS do $\mathbb{R}^m$.
2. Diferencovatelnost Φ stačí ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu plochy S.
3. Pro každou mapu φ plochy S je inverzní zobrazení φ^{-1} třídy C^m na ploše $\operatorname{im}\varphi \subset S$.

Tvrzení 1.9 (korektnost definice diferenciálu na ploše)**.** *Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní (nezávisí na volbě mapy).*

Důkaz. Buďte $\varphi : U \to S$ a $\psi : V \to S$ dvě k-mapy, $x = \varphi(u) = \psi(v)$. Pak $\Phi \circ \varphi = \Phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ na okolí bodu u, a tedy

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u),$$

což dává

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1} = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1}.$$

□

1.3 Míra na ploše, plošný integrál

Motivace: Uvažujme prosté lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(k < n)$, označme $M := L(\mathbb{R}^k)$, a uvažujme shodnost $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takovou, že $R(M) = \mathbb{R}^k \times \{0, \ldots, 0\}$. Nechť Π je projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic. Pak $\Pi \circ R \circ L$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^k$ a platí

$$|\det(\Pi R L)| = \sqrt{\det((\Pi R L)^T \Pi R L)} = \sqrt{\det(L^T L)}$$

(protože $\Pi^T\Pi$ i $R^T R$ jsou jednotkové matice). Podle věty o substituci (pro lineární zobrazení) je

$$\lambda^k(\Pi \circ R \circ L(B)) = \sqrt{\det(L^T L)}\, \lambda^k(B), \quad B \in \mathcal{B}^k$$

($\mathcal{B}^k$ značí Borelovskou σ-algebru v $\mathbb{R}^k$). Je přirozené definovat (Lebesgueovu) míru λ_M na podprostoru M tak, aby pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}^n \cap M := \{B \cap M : B \in \mathcal{B}^n\}$ platilo

$$\lambda_M(B) = \lambda^k(\Pi \circ R(B))$$

(neboť $\Pi \circ R$ zobrazuje M izometricky na $\mathbb{R}^k$). Pak lze λ_M popsat předpisem

$$\lambda_M(B) := \sqrt{\det(L^T L)}\, \lambda^k(L^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap M.$$

Poznamenejme ještě, že matici zobrazení $\Pi R L$ můžeme chápat jako matici lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^k \to M$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi lineárního prostoru M.

Definice 1.6. Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa. Na jednoduché k-ploše $S := \varphi(U)$ definujeme borelovskou míru μ_S předpisem

$$\mu_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\varphi(u)\, d\lambda^k(u), \quad B \subset S \text{ borelovská,}$$

kde

$$J_k\varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))}, \quad u \in U.$$

Pozn.:

1. $J_k\varphi(u) > 0$, neboť $D\varphi(u)$ má plnou hodnost (bylo na cvičení).
2. $J_k\varphi(u) = |\det d\varphi(u)|$, pokud lineární zobrazení $d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \to T_{\varphi(u)}S$ reprezentujeme maticí vzhledem k libovolné ortonormální bázi tečného prostoru $T_{\varphi(u)}S$.

Tvrzení 1.10 (korektnost definice míry na ploše)**.** *Definice μ_S je korektní (nezávisí na volbě parametrizace).*

Důkaz. Mějme $\varphi : U \to S$ a $\psi : V \to S$ dvě k-mapy parametrizující plochu S. Pak $\psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ je C^1-difeomorfismus a podle věty o substituci (z přednášky Teorie míry 1, dokázané v Teorii míry 2) platí (klademe $v = \psi^{-1} \circ \varphi(u)$) a píšeme stručně du, dv místo $d\lambda^k(u), d\lambda^k(v)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\psi^{-1}(B)} J_k\psi(v)\, dv &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\psi(v)\, |\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)|\, du \\
&= \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det d\psi(v)||\det(d\psi(v))^{-1}(d\varphi(u))|\, du \\
&= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k\varphi(u)\, du
\end{aligned}$$

(použili jsme vzorec z věty o změně parametrů plochy). $\square$

Tvrzení 1.11 (existence spočetného atlasu)**.** *Každá plocha v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše spočetný atlas.*

Důkaz. Očíslujme si $\{U_1, U_2, \dots\}$ všechny koule v $\mathbb{R}^n$ s racionálními středy i poloměry. Nechť je dána k-plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ a pro každý bod $x \in S$ označme φ_x nějakou k-mapu S splňující $x \in \operatorname{im}\varphi$. Jistě existuje index $i(x)$ takový, že $x \in U_{i(x)} \cap S \subset \operatorname{im}\varphi_x$. Ke každému $j \in J := \{i(x) : x \in S\}$ vyberme libovolnou mapu $\varphi_j := \varphi_x$ pro nějaké x s $i(x) = j$. Pak $\{\varphi_j : j \in J\}$ je atlas S. $\square$

Věta 1.12 (existence a jednoznačnost míry na ploše; definice)**.** *Na každé k-ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna Borelovská míra μ_S taková, že pro každou k-mapu φ plochy S platí $\mu_S | \operatorname{im} \varphi = \mu_{\operatorname{im} \varphi}$.*

Důkaz. Buď $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\}$ nějaký nejvýše spočetný atlas S. Uvažujme rozklad plochy $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, kde $S_1 := \operatorname{im} \varphi_1$, $S_2 := \operatorname{im} \varphi_2 \setminus \operatorname{im} \varphi_1$, $S_3 := \operatorname{im} \varphi_3 \setminus (\operatorname{im} \varphi_1 \cup \operatorname{im} \varphi_2)$, ... Položme

$$\mu_S(B) := \sum_i \mu_{\operatorname{im} \varphi_i}(B \cap S_i), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap S.$$

Je-li ψ libovolná k-mapa plochy S, pak pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \operatorname{im} \psi$ platí

$$\mu_S(B) = \sum_i \mu_S(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\operatorname{im} \varphi_i}(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\operatorname{im} \psi}(B \cap S_i) = \mu_{\operatorname{im} \psi}(B)$$

(ve třetí rovnosti jsme využili nezávislosti míry na parametrizaci jednoduché k-plochy). Jednoznačnost je zřejmá. $\square$

Definice 1.7 (Plošný integrál prvního druhu)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $f : S \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_S f \, dS := \int_S f \, d\mu_S,$$

má-li integrál na pravé straně smysl (integrál chápeme jako abstraktní Lebesgueův integrál podle borelovské míry μ_S).

Pozn.: Symbol "dS" je tradičně používán pro tento typ plošného integrálu a nevztahuje se ke značení plochy S.

Přednáška 7.3.2023

Věta 1.13 (Izometrie ploch)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ shodnost (izometrie), pak $\rho(S)$ je rovněž k-plocha a platí $\mu_{\rho(S)} = \mu_S \rho^{-1}$.*

Důkaz. Je-li $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-mapa, pak $\rho \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ je rovněž k-mapa. Navíc platí $D(\rho \circ \varphi)(u) = R \circ D\varphi(u)$, $u \in U$, kde R je lineární složka shodnosti ρ, a tedy

$$J_k(\rho\circ\varphi)(u) = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T R^T R(D\varphi(u))} = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T (D\varphi(u))} = J_k\varphi(u).$$

Z toho plyne, že pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \operatorname{im}(\rho \circ \varphi)$

$$\mu_{\operatorname{im}(\rho\circ\varphi)}(B) = \mu_{\operatorname{im}\varphi}(\rho^{-1}(B)).$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že pro libovolný atlas (φ_i) plochy S je $(\rho \circ \varphi_i)$ atlas plochy $\rho(S)$. ☐

Věta 1.14 (Podplochy nižší dimenze mají míru nula)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha a $S' \subset S$ l-plocha, $l < k$. Pak $\mu_S(S') = 0$.*

Důkaz. Použitím spočetných atlasů stačí ukázat větu pro případ jednoduchých ploch: $S = \varphi(U)$, $S' = \psi(V)$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je k-mapa a $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ l-mapa. Složené zobrazení $\varphi^{-1} \circ \psi : V \to U \subset \mathbb{R}^k$ je třídy C^1, což ukážeme podobně jako pro případ křivky na ploše ($l = 1$), tedy pomocí vhodné projekce plochy na okolí daného bodu do podprostoru dimenze k. Dále $\varphi^{-1} \circ \psi$ je regulární a je to homeomorfismus, tedy je to l-mapa v $U \subset \mathbb{R}^k$. Množina $Q := \varphi^{-1}(S')$ je tedy (jednoduchá) l-plocha v $\mathbb{R}^k$. Ukážeme, že $\lambda^k(Q) = 0$ (z toho již plyne dokazované tvrzení).

Podle Věty 1.4 ke každému bodu $x \in Q$ existuje okolí O_x takové, že $Q \cap O_x$ lze zapsat jako graf funkce $h : W \to L^\perp$ definované na otevřené podmnožině W nějakého l-rozměrného podprostoru $L \subset \mathbb{R}^k$. Z Fubiniho věty snadno plyne, že míra grafu funkce je nula, tedy $\lambda^k(Q \cap O_x) = 0$. Z otevřeného pokrytí $Q = \bigcup_{x\in Q} O_x$ lze vybrat spočetné podpokrytí (argument je stejný jako při důkazu existence spočetného atlasu), tedy i $\lambda^k(Q) = 0$. ☐

Definice 1.8 (zobecněná plocha)**.** Neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *zobecněná k-plocha*, jestliže existuje rozklad

$$S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup M_1 \cup \cdots \cup M_q \quad p \geq 1,\ q \geq 0,$$

kde $S_1, \dots, S_p$ jsou jednoduché k-plochy a M_j je l_j-plocha dimenze $0 \leq l_j < k$, $j = 1, \dots, q$ ($q \geq 0$), a platí podmínka

$$S_i \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \overline{S_{i'}} \cup \bigcup_{j=1}^{q} \overline{M_j} \right) = \emptyset.$$

Pozn.:

1. Pod 0-plochou rozumíme množinu izolovaných bodů.
2. Jednoduché k-plochy S_i nazveme *komponentami* S. Body $x \in S_i$ nazveme *regulárními body* plochy.
3. Poslední podmínka říká, že každá komponenta musí mít prázdný průnik s uzávěry všech ostatních komponent, jedná se tedy o zesílenou podmínku disjunktnosti.
4. Standardním příkladem zobecněné $(n-1)$-plochy je hranice jednotkové krychle $\partial[0,1]^n$.

Definice 1.9 (míra na zobecněné ploše)**.** Na zobecněné k-ploše $S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup M_1 \cup \cdots \cup M_q$ definujeme míru μ_S předpisem

$$\mu_S := \mu_{S_1} + \cdots + \mu_{S_p},$$

a plošný integrál prvního druhu jako integrál podle této míry.

Tvrzení 1.15 (korektnost definice μ_S)**.** *Definice míry μ_S na zobecněné k-ploše S je konzistentní, tedy nezávisí na reprezentaci zobecněné plochy.*

Důkaz. Mějme dvě různé reprezentace zobecněné k-plochy S:

$$S = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup M_1 \cup \cdots \cup M_q = S'_1 \cup \cdots \cup S'_{p'} \cup M'_1 \cup \cdots \cup M'_{q'}.$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_{S_i} = \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_i},$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_i}|S'_j = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_j}|S_i$$

(zde využíváme toho, že $\mu_{S_i}(M'_l) = \mu_{S'_j}(M_l) = 0$ pro všechna i, j, l).

Pokud $S_i = \varphi_i(U_i)$ a $S'_j = \varphi'_j(U'_j)$ jsou příslušné parametrizace, platí

$$S_i \cap S'_j = \varphi_i(U_i \cap ((\varphi_i)^{-1} \circ \varphi'_j(U'_j)) = \varphi'_j(U'_j \cap ((\varphi'_j)^{-1} \circ \varphi_i(U_i)).$$

Protože φ_i a φ'_j jsou homeomorfismy, je průnik $S_i \cap S'_j$ relativně otevřená množina jak v S_i, tak v S'_j , je to tedy buď prázdná množina, nebo jednoduchá k-plocha a platí

$$\mu_{S_i}|S'_j = \mu_{S_i \cap S'_j} = \mu_{S'_j}|S_i.$$

□

1.4 Gaussova-Ostrogradského věta

Motivace: Newtonův vzorec říká že pro "rozumné" reálné funkce f jedné proměnné platí

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Uvedeme zde analogii pro funkci více proměnných.

Buď $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená omezená množina a g, h dvě reálné funkce třídy C^1 definované na nějakém okolí uzávěru $\overline{O}$ takové, že $g < h$ na O a $g = h$ na hranici ∂O. Položme

$$\Omega := \{(x,t) \in O \times \mathbb{R} :\ g(x) < t < h(x)\}$$

(oblast mezi grafy, otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$). Mějme dále nějakou reálnou funkci F třídy C^1 definovanou na nějakém okolí uzávěru $\overline{\Omega}$. Pro každé $x \in O$ platí podle Newtonova vzorce

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt = F(x,h(x)) - F(x,g(x)).$$

Zintegrováním obou stran dostaneme

$$\int_O \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dt\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_O F(x,h(x)) - F(x,g(x))\,d\lambda^{n-1}(x).$$

Levou stranu můžeme s pomocí Fubiniovy věty zapsat jako $\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial z_n}(z)\,d\lambda^n(z)$. Nechť $\nu(z)$ značí jednotkový vektor vnější normály k oblasti Ω v bodě z. Pokud $z = (x,t)$ leží na grafu funkce h, pak

$$\nu(z) = \left(\|\nabla h(x)\|^2 + 1\right)^{-1/2} \left(-\frac{\partial h}{\partial z_1}(x), \ldots, -\frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}(x), 1\right).$$

Zobrazení $x \mapsto (x, h(x))$ parametrizující graf h má Jakobián $\left(\|\nabla h(x)\|^2 + 1\right)^{1/2}$, tedy lze psát

$$\int_O F(x,h(x))\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\text{graf } h} F\,\nu_n\,dS$$

s plošným integrálem na pravé straně, kde ν_n je n-tá souřadnice normálového vektoru ν. Analogický vzorec platí i pro graf g a dohromady dostaneme

$$\int_O F(x,h(x)) - F(x,g(x))\,d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\partial\Omega} F\,\nu_n\,dS.$$

Výše uvedenou rovnost tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial z_n}(z)\,d\lambda^n(z) = \int_{\partial\Omega} F\,\nu_n\,dS.$$

Přednáška 14.3.2023

Poznámka: Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená množina, jejíž hranice $\partial\Omega$ je zobecněná $(n-1)$-plocha, pak v každém regulárním bodě $x \in \partial\Omega$ existuje jednoznačně určený jednotkový vnější normálový vektor k Ω, který budeme značit symbolem $\nu(x)$. To je snadno vidět, pokud reprezentujeme hranici $\partial\Omega$ na okolí bodu x jako graf C^1 funkce $n-1$ proměnných.

Uvedený motivační příklad je speciálním případem následující věty.

Věta 1.16 (Gauss-Ostrogradsky)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina taková, že její hranice $\partial\Omega$ je zobecněná $(n-1)$-plocha s konečným plošným obsahem. Nechť pro regulární body $x \in \partial\Omega$ $\nu(x)$ značí jednotkový vektor vnější normály k Ω v bodě x. Nechť $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 (tedy lze rozšířit na nějaké okolí množiny $\overline{\Omega}$ jako funkce třídy C^1). Pak platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\, d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} F\, \nu_i\, dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důsledek 1.17 (věta o divergenci)**.** *Nechť Ω je jako v předchozí větě a $T : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1. Pak*

$$\int_\Omega \operatorname{div} T\, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu\rangle\, dS$$

($\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ je divergence pole T).

2 Plošný integrál druhého druhu

2.1 Multivektory a diferenciální formy

Mějme vektorový prostor V dimenze n se skalárním součinem (obvykle uvažujeme $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem). Pod *k-lineární formou na V* rozumíme funkci

$$f : V \underbrace{\times \cdots \times}_{k\times} V \to \mathbb{R}$$

lineární v každé proměnné.

Definice 2.1. k-lineární forma $f : V^k \to \mathbb{R}$ je *antisymetrická*, jestliže

$$f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn} \pi) f(v_1, \dots, v_k)$$

pro všechna $v_1, \dots, v_k \in V$ a pro každou permutaci $\pi \in \Sigma(k)$ množiny $\{1, \dots, k\}$; $\operatorname{sgn} \pi$ značí znaménko permutace π. Prostor všech antisymetrických k-forem na V budeme značit symbolem $\Lambda^k(V)$. Pod 0-formou rozumíme reálné číslo, tedy $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.

Cvičení: Je-li f antisymetrická k-forma a vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně závislé, pak $f(v_1, \dots, v_k) = 0$. (Návod: nejprve ukažte, že $f(v_1, \dots, v_k) = 0$, pokud existují dva různé indexy i, j, pro něž $v_i = v_j$.)

Pozn.: Je-li $(b_1, \dots, b_n)$ báze V, je každá antisymetrická forma $f \in \Lambda^k(V)$ určena hodnotami

$$f(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Dále budeme pracovat s $V = \mathbb{R}^n$ a s kanonickou bází $(e_1, \dots, e_n)$.

Značení: Pro indexovou množinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ o k prvcích ($|I| = k$) budeme symbolem $e_I^* \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ značit antisymetrickou k-formu splňující pro $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $I = \emptyset$ klademe $e_\emptyset^* := 1$.

Tvrzení 2.1 (o bázi $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$)**.** *k-vektory e_I^*, $|I| = k$, tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, tedy* $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.

Důkaz. Prvky e_I^* jsou zřejmě lineárně nezávislé (uvažujeme pouze různé množiny k indexů): skutečně, pokud $\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^* = 0$, pak pro každou pevnou $I_0 = \{i_1 < \dots < i_k\}$ je

$$\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \alpha_{I_0} = 0,$$

tedy $\alpha_I = 0$ pro každé I. Dále každou $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme psát ve tvaru $f = \sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*$ s koeficienty $\alpha_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. $\square$

Definice 2.2 (vnější algebra, vnější součin)**.** *Vnější algebru* nad $\mathbb{R}^n$ definujeme jako direktní součet

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

(Direktní součin $V \oplus W$ vektorových prostorů V, W je definován jako

$$V \oplus W := \{v + w : v \in V, w \in W\},$$

a sčítání je zde definováno po složkách, tedy sčítají se pouze prvky z V nebo prvky z W; platí $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.)

Zřejmě $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Pro indexové množiny $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ definujeme *vnější součin* prvků e_I^* a e_J^* jako

$$e_I^* \wedge e_J^* = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I, J)\, e_{I \cup J}^*, & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\operatorname{sgn}(I, J)$ značí znaménko permutace, která převádí prvních $|I|$ prvků množiny $I \cup J$ rostoucím způsobem na I a zbývajících $|J|$ prvků rostoucím způsobem na J. Zřejmě $e_I^* \wedge e_J^* \in \Lambda^{|I|+|J|}(\mathbb{R}^n)$. Vnější součin rozšíříme lineárně a distributivně na celou vnější algebru $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.2. *Operace vnějšího součinu $\wedge$ je asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Plyne přímo z definice. $\square$

Cvičení: Pro obecné prvky $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ a $g \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ platí $f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$,

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma(k,l)} (\operatorname{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

kde $\Sigma(k,l)$ je množina všech permutací $\sigma \in \Sigma(k+l)$ takových, že $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ a $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.

Značení: Pro jednoprvkové indexové množiny $\{i\}$ budeme psát

$$dx_i := e_i^* := e_{\{i\}}^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

Zřejmě pro množinu $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ pak platí

$$e_I^* = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

a i zde budeme používat značení $dx_I := e_I^*$.

Definice 2.3 (duální prostor)**.** Je-li V vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$, pak symbolem $V^* := \Lambda^1(V)$ značíme prostor všech lineárních forem na V a nazýváme *duálním prostorem k V*.

Druhý duál (biduál) $V^{**} = (V^*)^*$ obvykle kanonicky ztotožňujeme s prostorem V ($V^{**} = V$) na základě následujícího kanonického izomorfismu:

$$v \in V \mapsto F_v \in V^{**}, \quad F_v : f \mapsto f(v), \quad f \in V^*.$$

Zobrazení $F : v \mapsto F_v$ je zřejmě lineární, prosté a jeho obraz je podprostor dimenze n v V^{**}, přitom $\dim V^{**} = n$, tedy nutně F je na V^{**}.

Přednáška 21.3.2023

Definice 2.4 (multivektory)**.** Pro vektorový prostor V dimenze n definujeme vektorový prostor k-vektorů jako

$$\Lambda_k(V) := \Lambda^k(V^*),$$

a příslušnou vnější algebru jako

$$\Lambda_*(V) := \Lambda^*(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda_k(V).$$

Pro $k = 1$ ztotožňujeme

$$\Lambda_1(V) = \Lambda^1(V^*) = V^{**} \cong V.$$

V případě $V = \mathbb{R}^n$ má tento prostor bázi $\{e_I = e_I^{**}, |I| = k\}$ (ztotožňujeme V^{**} s V). Prostor $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme chápat jako duál $(\Lambda_k(\mathbb{R}^n))^*$, položíme-li $e_I^*(e_J) = \delta_{I,J}$.

Pozn.: Na $\Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ je definován vnější součin a pro vektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$.

Definice 2.5. k-vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ je *jednoduchý*, jestliže existují $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\alpha = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$.

Cvičení Ukažte, že 2-vektor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ v $\mathbb{R}^4$ není jednoduchý.

Definice 2.6 (skalární součin)**.** Pro indexové množiny I, J, $|I| = |J| = k$, definujeme skalární součin jako

$$e_I \cdot e_J := \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = J, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a rozšíříme tuto definici lineárně na $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Skalární součin indukuje normu $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.

Cvičení:

1. Pro vektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ platí

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \det\,(u_{i,j})_{i,j=1}^n \;(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

2. Pro $u, v \in \mathbb{R}^n$ je

$$u \wedge v = \sum_{i<j} (u_i v_j - u_j v_i)(e_i \wedge e_j).$$

3. Pro $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\{|I|=k\}} \left(\det(v_{i,j})_{i=1,j\in I}^k\right)^k e_I.$$

Definice 2.7. Pro multivektor $\alpha \in \Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ položme

$$L(\alpha) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \wedge \alpha = 0\}.$$

Tvrzení 2.3. *Pro nenulový k-vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ platí:*

(i) *$L(\alpha)$ je vektorový prostor dimenze nejvýše k.*

(ii) $\dim L(\alpha) = k$ *právě tehdy, když je α jednoduchý.*

(iii) *Jestiže $L(\alpha) = L(\beta)$ pro nějaký jednoduchý $\beta \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$, pak $\beta = c\alpha$ pro nějaké $c \neq 0$.*

Pozn.: Z výše uvedených vlastností plyne, že normované jednoduché k-vektory reprezentují orientované k-rozměrné podprostory $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. (i). Snadno z definice odvodíme, že $L(\alpha)$ je vektorový prostor. Zvolme $\{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormální bázi prostoru $L(\alpha)$ (tedy $m = \dim L(\alpha)$), a doplňme ji na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^n$: $\{v_1, \dots, v_n\}$. Pomocí této báze můžeme definovat bázi $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ tvořenou k-vektory

$$v_I := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}, \quad I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Pomocí této báze vyjádříme

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I v_I.$$

Pro každý index $i \leq m$ musí být $0 = v_i \wedge \alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I (v_i \wedge v_I)$, a tedy $\alpha_I = 0$ jakmile $i \notin I$. Nutně tedy $\alpha_I \neq 0$ pouze pro indexové množiny obsahující $\{1, \dots, m\}$, tedy $k \geq m$.

(ii). Z výše uvedeného je zřejmé, že pokud $k = m$, pak $\alpha_I \neq 0$ pouze pro $I = \{1, \dots, k\}$, a tedy α je jednoduchý. Obráceně, pokud $0 \neq \alpha = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ je jednoduchý, pak u_i jsou lineárně nezávislé vektory a všechny patří do $L(\alpha)$, a tedy $m \geq k$.

(iii). Výše jsme ukázali, že pro $k = m$ je každý jednoduchý k-vektor β s $L(\beta) = L(\alpha)$ násobkem $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. □

Definice 2.8 (diferenciální forma)**.** *Diferenciální formou stupně k* rozumíme hladké (C^∞) zobrazení

$$\omega : \Omega \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

definované na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{E}^k(\Omega)$ značíme vektorový prostor všech diferenciálních k-forem na Ω.

Pozn.: Každou diferenciální k-formu $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ můžeme psát ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x)\, dx_I, \quad x \in \Omega,$$

s hladkými reálnými funkcemi $\omega_I : \Omega \to \mathbb{R}$. (Připomeňme, že $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, pokud $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$.)

Definice 2.9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 \le k \le n$. *Vnější (de Rhamův) diferenciál* je zobrazení

$$d : \mathcal{E}^k(\Omega) \to \mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$$

definované následovně: Pro $k = 0$ a $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je reálná funkce) klademe

$$df(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in \Omega.$$

Pro $k > 0$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$ pak

$$\begin{aligned} d\omega(x) &:= \sum_{|I|=k} (d\omega_I(x) \wedge dx_I) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x)\, (dx_i \wedge dx_I), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Příklad: Pro 1-formu $\omega(x,y) = (x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy$ dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega(x,y) &= 2x(dx \wedge dx) + 2y(dy \wedge dx) - 2y(dx \wedge dy) - 2x(dy \wedge dy) \\ &= -4y\,(dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Věta 2.4 (pravidla pro vnější diferenciál)**.** *Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou, $0 \le k, l \le n$, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\tau \in \mathcal{E}^l(\Omega)$ platí:*

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$*, pokud* $k = l$.

(ii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k\, \omega \wedge d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz. Vlastnost (i) plyne přímo z definice.

(ii) Vzhledem k linearitě vnějšího diferenciálu stačí rovnost dokázat pro případ $\omega = \omega_I\, dx_I$, $\tau = \tau_J\, dx_J$. Platí

$$\begin{aligned} d(\omega_I dx_I \wedge \tau_J dx_J) &= d(\omega_I \tau_J (dx_I \wedge dx_J)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) (dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^{n} \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} (-1)^k\, dx_I \wedge dx_i \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k\, \omega \wedge d\tau. \end{aligned}$$

(iii) Opět stačí uvažovat případ $\omega = \omega_I dx_I$. V případě $k = 0$ je $\omega = f \in C^\infty(\Omega)$, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ a

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \, dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0, \end{aligned}$$

neboť parciální derivace druhého řádu funkce f jsou symetrické. Pro $k > 0$ pak máme

$$d(\omega_I \, dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I$$

a podle pravidla (ii)

$$\begin{aligned} d^2(\omega_I \, dx_I) &= d(d\omega_I \wedge dx_I) \\ &= d^2\omega_I \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Přednáška 28.3.2023

Definice 2.10. Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ $(k \geq 1)$ je *exaktní*, pokud $\omega = d\tau$ pro nějakou $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je *uzavřená*, pokud $d\omega = 0$.

Pozn.: Podle posledního tvrzení předchozí věty je každá exaktní forma uzavřená. Pro některé oblasti Ω platí i obrácená implikace, například pro otevřenou kouli (Poincarého lemma).

Definice 2.11 (přenos diferenciální formy)**.** Buďte $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny a $\Phi : U \to V$ hladké (C^∞) zobrazení. Pro $0 \leq k \leq \min(m,n)$ definujeme zobrazení

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(V) \to \mathcal{E}^k(U)$$

následovně:

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k},$$

pokud $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)^T$.

Pozn.: Pro $k = 0$ je $\Phi^* f = f \circ \Phi$, pro $k \geq 1$ pak

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_k} \right).$$

Příklad: Pro $\Phi(u,v) = (u\cos v, u \sin v)$ a $\omega = (x^2+y^2)dx \wedge dy$ je

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega) &= u^2(d(u\cos v) \wedge d(u \sin v))\\ &= u^2(\cos v\, du - u \sin v\, dv) \wedge (\sin v\, du + u \cos v\, dv)\\ &= u^3\, du \wedge dv.\end{aligned}$$

Věta 2.5 (Vlastnosti přenosu dif. formy)**.** *Nechť $\Phi : U \to V$ je třídy C^∞, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny, $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(V)$. Pak platí:*

(i) $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*\omega + \Phi^*\tau$, *pokud* $k = l$,

(ii) $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$,

(iii) $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$,

(iv) je-li $\Psi : W \to U$ *třídy* C^∞, $W \subset \mathbb{R}^p$ *otevřená, pak* $(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^* \circ \Phi^*(\omega)$,

(v) pro $k = m = n$ *a* $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ *je*

$$\Phi^*\omega = J\Phi\, (f \circ \Phi)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

kde

$$J\Phi = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Důkaz. (i) Plyne přímo z definice.

(ii) Stačí (vzhledem k (i)) dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Nechť $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $J = \{j_1 < \cdots < j_l\}$. Pak

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*(\omega_I \tau_J \, dx_I \wedge dx_J) \\ &= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{j_l} \\ &= \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau.\end{aligned}$$

(iii) Dokazujeme opět pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Podle definice je

$$\begin{aligned}\Phi^*(d\omega) &= \Phi^*\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) d\Phi_i \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}, \\ d(\Phi^*\omega) &= d\left((\omega_I \circ \Phi)\, d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j}\, du_j \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k}.\end{aligned}$$

Dosazením rovností

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$$

do výše uvedených vztahů dostaneme kýženou rovnost $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.

(iv) Pokud $\omega = f \in \mathcal{E}^0(V)$, pak

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = f \circ (\Phi \circ \Psi) = (f \circ \Phi) \circ \Psi = \Psi^*(f \circ \Phi) = \Psi^* \circ \Phi^*(f).$$

Pokud dále $\omega = dx_i \in \mathcal{E}^1(V)$, pak

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Psi)^*\omega &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial(\Phi \circ \Psi)_i}{\partial y_j}\, dy_j = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Psi_l}{\partial y_j} dy_j\right) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) d\Psi_l = \Psi^*\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} du_l\right) = \Psi^*(\Phi^*\omega).\end{aligned}$$

Obecný případ dostaneme pomocí vlastností (i) a (ii).

(v) Pro $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ je skutečně

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= (f \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi_n \\ &= (f \circ \Phi) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_j} du_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_j} du_j\right) \\ &= (f \circ \Phi) J\Phi\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.\end{aligned}$$

□

2.2 Orientace plochy, integrace diferenciálních forem

Definice 2.12 (orientace plochy)**.** *Orientací* k-plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme spojité zobrazení

$$\tau : S \to \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$$

takové, že pro každý bod $x \in S$ je $\tau(x)$ jednoduchý k-vektor s normou $\|\tau(x)\| = 1$ a splňující $\tau(x) \in \Lambda_k(T_x S)$ (tedy $\tau(x)$ reprezentuje tečný prostor $T_x S$, $L(\tau(x)) = T_x S$).

Příklady:

1. Pro 1-plochu S a $x \in S$ je $\tau(x)$ jednotkový vektor tečný k S v x.
2. Pro válcovou plochu $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ můžeme volit třeba

$$\tau(x, y, z) = (y, -x, 0) \wedge (0, 0, 1), \quad (x, y, z) \in S.$$

Definice 2.13 (orientovaný atlas)**.** (a) Jednoduchá k-plocha $S = \varphi(U)$ má orientaci

$$\tau(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\|}, \quad u \in U;$$

tuto orientaci nazveme *orientací indukovanou parametrizací* φ.

(b) Řekneme, že dvě mapy φ, ψ plochy S jsou *shodně orientované*, jestliže $\tau(\varphi(u)) = \tau(\psi(v))$ kdykoliv $\varphi(u) = \psi(v) \in S$.

(c) Atlas $\mathcal{A}$ plochy S nazveme *orientovaným atlasem*, jsou-li každé jeho dvě mapy shodně orientované. Orientovaný atlas zřejmě určuje orientaci plochy.

Cvičení: Dvě mapy φ, ψ plochy S jsou shodně orientované právě tehdy, když pro každý bod $\varphi(u) = \psi(v) \in S$ platí

$$J(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = \det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) > 0.$$

Cvičení: Popište dvě různé orientace jednotkové sféry S^2.

Přednáška 4.4.2023

Definice 2.14 (integrace diferenciálních forem, I). 1. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$, pak $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ pro nějakou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ a definujeme

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f(x)\,d\lambda^n(x),$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

2. Je-li $S = \varphi(U)$ jednoduchá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ určená C^∞ mapou φ, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, definujeme

$$\int_S \omega := \int_U \varphi^*\omega,$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Pozn.:

(a) Jednoduchá plocha $S = \varphi(U)$ má orientaci danou mapou φ.

(b) Integrál $\int_S \omega$ vždy existuje a je konečný (tedy *konverguje*) pokud $S \cap \operatorname{spt}\omega$ je kompaktní, kde

$$\operatorname{spt}\omega := \operatorname{cl}_\Omega\{x \in \Omega : \omega(x) \neq 0\}$$

je *nosič* formy ω (cl_Ω zde značí relativní uzávěr v Ω). Skutečně, je-li $S \cap \operatorname{spt}\omega$ kompaktní, pak i $K := \varphi^{-1}(S \cap \operatorname{spt}\omega) \subset U$ je kompaktní (protože φ je homeomorfismus) a $\operatorname{spt}(\varphi^*\omega) \subset K$. k-formu $\varphi^*\omega$ na $U \subset \mathbb{R}^k$ lze psát ve tvaru $\varphi^*\omega = g\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ pro nějakou hladkou funkci $g \in C^\infty(U)$ a platí

$$\int_U (\varphi^*\omega) = \int_U g\,d\lambda^k = \int_K g\,d\lambda^k$$

a poslední integrál konverguje (g je spojitá a K kompaktní).

Tvrzení 2.6 (nezávislost integrálu na mapě). *(i) Je-li $g : V \to U$ C^∞ difeomorfismus dvou otevřených množin $U, V \subset \mathbb{R}^n$ s kladným Jakobiánem ($Jg > 0$ na V), pak pro každou n-formu $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$ platí $\int_U \omega = \int_V g^*\omega$, pokud jeden z integrálů existuje.*

(ii) Jsou-li $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ a $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dvě shodně orientované k-mapy parametrizující tutéž jednoduchou k-plochu $S = \varphi(U) = \psi(V)$, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak platí

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_V \psi^*\omega,$$

pokud jeden z integrálů existuje.

Důkaz. (i) Pro n-formu $\omega = f\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ platí

$$g^*\omega = (Jg)(f \circ g)\, dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

a tedy

$$\int_U \omega = \int_U f(u)\, d\lambda^n(u),$$
$$\int_V g^*\omega = \int_V (f \circ g)(v) Jg(v)\, d\lambda^n(v),$$

a oba integrály na pravé straně se rovnají podle věty o substituci (připomeňme, že $Jg > 0$).

(ii) Víme, že přechodové zobrazení $g := \varphi^{-1} \circ \psi : V \to U$ je C^∞ difeomorfismus, který má navíc kladný Jakobián (díky shodné orientaci map). Platí tedy

$$\int_V \psi^*\omega = \int_V (\varphi \circ g)^*\omega = \int_V g^*(\varphi^*\omega) = \int_U \varphi^*\omega.$$

Využili jsme vzorec pro přenos složeným zobrazením a část (i).

□

Přednáška 11.4.2023

Na prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ je *norma* definovaná takto:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{|I|=k} \alpha_I^2}, \quad \alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I dx_I.$$

Tvrzení 2.7. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ jednoduchá orientovaná k-plocha, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak*

$$\left| \int_S \omega \right| \leq \int_S \|\omega\| \, dS,$$

je-li integrál na levé straně definován.

Důkaz. Nechť $S = \varphi(U)$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \, dx_I$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega &= \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} \\ &= \left(\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k, \end{aligned}$$

kde $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\varphi_I = (\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})$. Použitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_S \omega \right| &= \left| \int_U \left(\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right) d\lambda^k \right| \\ &\leq \int_U \left| \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right| d\lambda^k \\ &\leq \int_U \sqrt{\sum_{|I|=k} \omega_I \circ \varphi)^2} \sqrt{\sum_{|I|=k} (\det D\varphi_I)^2} \, d\lambda^k \\ &= \int_S \|\omega\| \, dS, \end{aligned}$$

protože $J_k\varphi = \sqrt{\sum_{|I|=k} (\det D\varphi_I)^2}$. □

Definice 2.15 (rozklad jednotky)**.** *Rozkladem jednotky* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme soubor funkcí $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ takových, že

1. pro každé $\alpha \in I$, $h_\alpha : \Omega \to [0,1]$ je funkce třídy C^∞ s kompaktním nosičem (v Ω) $\operatorname{spt} h_\alpha := \operatorname{cl}_\Omega \{x \in \mathbb{R}^n : h_\alpha(x) > 0\}$;
2. soubor $(\operatorname{spt} h_\alpha)_{\alpha \in I}$ je *lokálně konečný* (tzn.: pro každý bod $x \in \Omega$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $\{\alpha \in I : \operatorname{spt} h_\alpha \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ je konečná;

3. pro každý $x \in \Omega$ je $\sum_{\alpha\in I} h_\alpha(x) = 1$.

Je-li dále $\Omega = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$ otevřené pokrytí Ω, řekneme, že rozklad jednotky $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ je *podřízený* otevřenému pokrytí $\Omega = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$, jestliže ke každému $\alpha \in I$ existuje $\beta \in J$ takové, že $\operatorname{spt} h_\alpha \subset V_\beta$.

Pozn.: Z lokální konečnosti plyne, že rozklad jednotky je vždy nejvýše spočetný a součet $\sum_{\alpha\in I} h_\alpha$ je v každém bodě konečný.

Věta 2.8 (existence rozkladu jednotky)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\Omega = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$ její otevřené pokrytí. Pak existuje jemu podřízený rozklad jednotky $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ na Ω.*

Důkaz. (1) Ke každému $x \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ existuje funkce $f_{a,r} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ třídy C^∞ a taková, že $f_{a,r}(x) > 0$ právě tehdy, když $\|x-a\| < r$. Můžeme vzít například funkci

$$f_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{\|x-a\|^2}{\|x-a\|^2-r^2}\right), & \|x-a\| < r, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(2) Buď $K \subset \Omega$ kompaktní. Ke každému bodu $x \in K$ najdeme poloměr $r(x) > 0$ takový, že $B(x, r(x)) \subset V_\beta$ pro nějaké $\beta \in J$. Otevřené koule $U_{r(x)}(x)$, $x \in K$, pokrývají kompakt K, existuje tedy konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_k \in K$ tak, že

$$K \subset U_{r(x_1)}(x_1) \cup \dots \cup U_{r(x_k)}(x_k).$$

Funkce $g(y) := \sum_{j=1}^k f_{x_j, r(x_j)}(y)$ je kladná na kompaktní množině K a položíme-li $h_i := f_{x_i, r(x_i)}/g$, pak $\sum_{i=1}^k h_i = 1$ na K. Otevřenou množinu Ω budeme zdola aproximovat kompakty a uvedenou konstrukci budeme iterovat.

(3) Najdeme posloupnost kompaktních množin (K_j) v $\mathbb{R}^n$ takovou, že $K_j \nearrow \Omega$ a $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ pro každé j. Můžeme položit

$$K_j := [-j, j]^n \cap \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq j^{-1}\}, \quad j \geq j_0$$

(za j_0 vezmeme nějaké j_0, pro něž $K_{j_0} \neq \emptyset$).

(4) Podobně jako v části (2), pro každé $j \geq j_0$ najdeme konečně mnoho bodů $x_1^j, \dots, x_{k_j}^j \in K_j \setminus \operatorname{int} K_{j-1}$ takových, že

$$B(x_i^j, r(x_i^j)) \subset V_\beta \cap (\operatorname{int} K_{j+1} \setminus K_{j-2})$$

pro nějaké $\beta \in J$ a pro každé $j \geq j_0$ a $1 \leq j \leq k_j$, a

$$K_j \setminus \operatorname{int} K_{j-1} \subset \bigcup_{i=1}^{k_j} U_{r(x_i^j)}(x_i^j), \quad j \geq j_0$$

(klademe $K_{j_0-1} = K_{j_0-2} = \emptyset$). Položíme $I := \{(i,j) : 1 \leq i \leq k_j, j \geq j_0\}$ a

$$g_{i,j} := f_{x_i^j, r(x_i^j)}, \quad (i,j) \in I.$$

Jest $0 < \sum_{i,j} g_{i,j} < \infty$ na Ω a

$$h_\alpha := \frac{g_\alpha}{\sum_\alpha g_\alpha}, \quad \alpha = (i,j) \in I,$$

je hledaný rozklad jednotky. $\square$

Definice 2.16. Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s atlasem $\mathcal{A}$. Řekneme, že (h_α) je *rozklad jednotky pro S podřízený atlasu $\mathcal{A}$*, je-li (h_α) rozklad jednotky na nějaké otevřené množině $\Omega \supset S$ takový, že pro každé α existuje mapa $\varphi \in \mathcal{A}$ tak, že $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha$ je kompaktní podmnožina obrazu $\operatorname{im} \varphi$ mapy φ.

Důsledek 2.9. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s atlasem $\mathcal{A}$, existuje rozklad jednotky (h_α) pro S podřízený $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Plocha S je lokálně uzavřená, tedy existuje otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $S = \overline{S} \cap V$. Dále ke každé mapě $\varphi \in \mathcal{A}$ existuje otevřená množina $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\operatorname{im} \varphi = S \cap V_\varphi$ a můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $V_\varphi \subset V$. Položme $\Omega := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} V_\varphi$. Podle předchozí věty existuje rozklad jednotky (h_α) na Ω podřízený pokrytí $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} V_\varphi$. Dále víme, že ke každému α existuje $\varphi \in \mathcal{A}$ tak, že $\operatorname{spt} h_\alpha \subset V_\varphi$, tedy

$$S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset S \cap V_\varphi = \operatorname{im} \varphi.$$

Dále platí

$$S \cap \operatorname{spt} h_\alpha = \overline{S} \cap V \cap \operatorname{spt} h_\alpha = \overline{S} \cap \operatorname{spt} h_\alpha$$

a $\operatorname{spt} h_\alpha$ je kompaktní, tedy i $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha$ je kompaktní. $\square$

Definice 2.17 (Integrace diferenciálních forem, II)**.** Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná k-plocha, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$.

(a) Řekneme, že $\int_S \omega$ *konverguje*, jestliže

$$\int_S \|\omega\| \, dS < \infty.$$

(b) Pokud $\int_S \omega$ konverguje, definujeme integrál

$$\int_S \omega := \sum_\alpha \int_{\operatorname{im} \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega),$$

kde (h_α) je nějaký rozklad jednotky pro S podřízený nějakému orientovanému atlasu $\mathcal{A}$ a pro každé α, φ_α je mapa atlasu $\mathcal{A}$ taková, že $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha$ je kompaktní podmnožina $\operatorname{im} \varphi_\alpha$.

Přednáška 18.4.2023

Tvrzení 2.10 (korektnost definice plošného integrálu). *Nechť S, Ω a ω jsou jako v předchozí definici. Pak platí:*

(i) $\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega)$ existuje konečný pro libovolnou funkci h_α z nějakého rozkladu jednotky pro S s příslušnou mapou φ_α.

(ii) Jestliže $\int_S \omega$ konverguje, pak $\sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega)$ konverguje absolutně pro libovolný rozklad jednotky (h_α).

(iii) Jestliže $\int_S \omega$ konverguje, pak $\sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega)$ nezávisí na volbě rozkladu jednotky (h_α).

Důkaz. (i) Protože $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha$ je kompaktní a

$$\operatorname{im}\varphi_\alpha \cap \operatorname{spt}(h_\alpha\omega) = S \cap \operatorname{spt}(h_\alpha\omega) \subset S \cap \operatorname{spt} h_\alpha,$$

je i $S \cap \operatorname{spt}(h_\alpha\omega)$ kompaktní a integrál $\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega)$ existuje a je konečný (viz poznámka za definicí integrálu z diferenciálních forem I).

(ii) S využitím Tvrzení 2.7 a nezáporností funkcí h_α dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \left|\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega)\right| &\leq \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} \|h_\alpha\omega\|\, dS = \sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha} h_\alpha \|\omega\|\, dS \\ &= \sum_\alpha \int_S h_\alpha\|\omega\|\, dS = \int_S \left(\sum_\alpha h_\alpha\right)\|\omega\|\, dS \\ &= \int_S \|\omega\|\, dS < \infty.\end{aligned}$$

(iii) Buďte (h_α), (h'_β) dva rozklady jednotky pro S podřízené atlasům $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$. Ukážeme, že

$$\sum_\alpha \int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha\omega) = \sum_\beta \int_{\operatorname{im}\varphi'_\beta}(h'_\beta\omega).$$

Zřejmě $(h_\alpha h'_\beta)_{\alpha,\beta}$ je rozklad jednotky podřízený oběma atlasům $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, $S \cap \operatorname{spt}(h_\alpha h'_\beta) \subset \operatorname{im}\varphi_\alpha \cap \operatorname{im}\varphi'_\beta$ a podle nezávislosti integrálu na mapě pro jednoduchou plochu platí

$$\int_{\operatorname{im}\varphi_\alpha}(h_\alpha h'_\beta\omega) = \int_{\operatorname{im}\varphi'_\beta}(h_\alpha h'_\beta\omega).$$

Sečtením přes všechna α i β dostaneme požadovanou nerovnost (absolutní konvergence z (ii) nám umožňuje prohazovat sumace). □

Rozklady jednotky se nepoužívají pro praktické výpočty integrálů z diferenciálních forem. K výpočtu slouží následující věta.

Věta 2.11. *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha a $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ mapy S s disjunktními obrazy $S_i := \operatorname{im} \varphi_i \subset S$, $i = 1, \dots, p$, a takové, že*

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^{p} S_i \subset \bigcup_{j=1}^{q} M_j$$

pro nějaké plochy $M_1, \dots, M_q$ dimenze nižší než k. Nechť $\Omega \supset S$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak $\int_S \omega$ konverguje právě tehdy, když konvergují integrály $\int_{S_i} \omega$, $i = 1, \dots, p$, a platí

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^{p} \int_{S_i} \omega.$$

Důkaz. Víme, že $\mu_S(M_j) = 0$ pro všechna j, proto platí

$$\int_S \|\omega\| \, dS = \sum_{i=1}^{p} \int_{S_i} \|\omega\| \, dS,$$

z čehož plyne tvrzení o konvergenci. Dále nechť (h_α) je nějaký rozklad jednotky na S podřízený nějakému atlasu S. Podle definice je $\int_S \omega = \sum_\alpha \int_{\operatorname{im} \varphi_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)$ (kde φ_α je nějaká mapa atlasu plochy s vlastností $S \cap \operatorname{spt} h_\alpha \subset \operatorname{im} \varphi_\alpha$).

Pro každé α pak platí (značíme U_α definiční obor mapy φ_α)

$$\int_{\operatorname{im} \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} f \, d\lambda^k,$$

kde $f \in C^\infty(U_\alpha)$ splňuje

$$\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega) = f \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

Uvažujme rozklad

$$U_\alpha = \bigcup_i (U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i) \cup \bigcup_j (U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} M_j).$$

Víme, že $\varphi_\alpha^{-1} M_j$ je plocha dimenze menší než k, tedy její k-rozměrná míra je nulová. Platí tedy

$$\int_{\operatorname{im} \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^{p} \int_{U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i} f \, d\lambda^k = \sum_{i=1}^{p} \int_{U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)$$

(množiny $\varphi_\alpha^{-1}(S_i)$ jsou otevřené). Dále nechť $U_i \subset \mathbb{R}^k$ je definiční obor mapy φ_i, $i = 1, \dots, p$. $S_i \cap \operatorname{im} \varphi_\alpha$ je buď prázdná množina, nebo jednoduchá k-plocha, a z nezávislosti integrálu na parametrizaci dostaneme

$$\int_{\operatorname{im} \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^{p} \int_{U_i} \varphi_i^*(h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^{p} \int_{S_i} (h_\alpha \omega).$$

Sečtením přes všechna α dostaneme kýženou rovnost. $\square$

2.3 Plochy s krajem a Stokesova věta

Definice 2.18 (plocha s krajem)**.** Řekneme, že neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *k-plocha s krajem* (třídy C^∞), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje k-mapa $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^n$ (třídy C^∞), uzavřený poloprostor $H_\varphi \subset \mathbb{R}^k$ a otevřená množina $V_\varphi \ni x$ takové, že

$$\varphi(H_\varphi \cap U_\varphi) = S \cap V_\varphi.$$

Soubor $\mathcal{A}$ takovýchto k-map, jejichž obrazy pokrývají S, nazveme atlasem S. Množinu

$$\partial S := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi(\partial H_\varphi \cap U_\varphi)$$

nazveme *krajem* plochy S a množinu

$$\operatorname{int} S := S \setminus \partial S$$

vnitřkem S.

Pozn.:

1. Uzavřeným poloprostorem $\mathbb{R}^k$ rozumíme libovolnou množinu

   $$\{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, a\rangle \le t\}, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}^k,\ t \in \mathbb{R}.$$

2. Definice kraje a vnitřku plochy nezávisí na volbě atlasu (viz lemma níže).
3. Upozornění: ∂S zde neznačí hranici plochy v metrice $\mathbb{R}^n$.
4. Pro každou mapu φ plochy s krajem S jsou $\varphi(\operatorname{int} H_\varphi \cap U_\varphi)$ a $\varphi(U_\varphi \setminus H_\varphi)$ dvě disjunktní k-plochy, pokud jsou to neprázdné množiny.
5. Plocha s krajem nemusí být uzavřená množina. I plocha samotná (bez kraje) splňuje definici plochy s krajem. Jako příklady 2-ploch s krajem můžeme vzít vnitřek čtverce a přidat k němu vnitřky některých (nebo všech) jeho hran.

Lemma 2.12 (nezávislost kraje plochy na mapě)**.** *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je plocha s krajem a $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^n$, $\psi : V_\psi \to \mathbb{R}^n$ její dvě mapy s příslušnými poloprostory H_φ, K_ψ. Pak pro všechny body $x \in \varphi(U_\varphi \cap H_\varphi) \cap \psi(V_\psi \cap K_\psi)$ platí:*

$$x \in \varphi(\partial H_\varphi) \iff x \in \psi(\partial K_\psi).$$

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že existuje bod $x = \varphi(u) = \psi(v)$ takový, že $u \in U_\varphi \cap \operatorname{int} H_\varphi$ a $v \in V_\psi \cap \partial K_\psi$. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $U_\varepsilon(u) \subset \operatorname{int} H_\varphi$. Přechodové zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi$ je difeomorfismus, a tedy množina $W := \psi^{-1} \circ \varphi(U_\varepsilon(u))$ musí být otevřená. Ale bod v je podle předpokladu bodem hranice W, což je spor. $\square$

Tvrzení 2.13 (kraj k-plochy je $(k-1)$-plocha)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, pak její kraj ∂S je prázdná množina nebo $(k-1)$-plocha, a vnitřek* $\operatorname{int} S$ *je k-plocha.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je atlas S a pro $\varphi \in \mathcal{A}$ nechť U_φ je definiční obor φ a H_φ příslušný uzavřený poloprostor. Uvažujme restrikce

$$\tilde{\varphi} := \varphi|(U_\varphi \cap \operatorname{int} H_\varphi),$$
$$\bar{\varphi} := \varphi|(U_\varphi \cap \partial H_\varphi).$$

Zřejmě $\tilde{\varphi}$ je k-mapa a $\{\tilde{\varphi} : \varphi \in \mathcal{A}\}$ je atlas $\operatorname{int} S$, tedy $\operatorname{int} S$ je k-plocha. Dále si stačí uvědomit, že složíme-li $\bar{\varphi}$ s lineárním izomorfismem L zobrazujícím $\mathbb{R}^{k-1}$ na ∂H_φ, dostaneme $(k-1)$-mapu: skutečně, $L^{-1}(U_\varphi \cap \partial H_\varphi)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{k-1}$, $L \circ \bar{\varphi}$ je třídy C^∞ a jeho diferencál má plnou hodnost (jinak by ani diferenciál φ v odpovídajícím bodě neměl plnou hodnost). Konečně zobrazení $\bar{\varphi}$, a tedy i $L \circ \bar{\varphi}$ je homeomorfismus ($\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}^{-1}$ jsou restrikce spojitých zobrazení, tedy spojitá zobrazení). $\square$

Přednáška 25.4.2023

Připomeňme si, že je-li $\varphi : U_\varphi \to S$ mapa a $u \in U_\varphi$, $x = \varphi(x)$, pak

$$d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \to T_x S$$

je lineární izomorfismus. Je-li S plocha s krajem, je tečný prostor $T_x S$ definován i v bodech kraje $x \in \partial S$. Tečný prostor ∂S je pak $(k-1)$-rozměrný lineární podprostor prostoru $T_x S$:

$$T_x(\partial S) \subset T_x S$$

a obrazem $d\varphi(u)(H_\varphi)$ je poloprostor v tečněm prostoru $T_x S$.

Definice 2.19 (vnější normálový vektor)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem a $x \in \partial S$ bod kraje, pak *jednotkový vnější normálový vektor* S v bodě x je jednotkový vektor $\nu_S(x) \in T_x S$ kolmý k $T_x(\partial S)$ a směřující “ven” z S. Je-li $\varphi : U_\varphi \to \mathbb{R}^n$ mapa S s příslušným poloprostorem

$$H_\varphi = \{v \in \mathbb{R}^k : \langle v, b\rangle \leq \alpha\},$$

a taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U_\varphi \cap \partial H_\varphi$, pak

$$\nu_S(x) = \frac{D\varphi(u)(D\varphi(u)^T D\varphi(u))^{-1} b}{\|D\varphi(u)(D\varphi(u)^T D\varphi(u))^{-1} b\|},$$

viz cvičení níže.

Cvičení: Pro prosté lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (reprezentované maticí značenou rovněž A) platí:

1. $\langle u, v\rangle = \langle A(A^T A)^{-1} u, Av\rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^k;$
2. Je-li $H = \{v \in \mathbb{R}^k : \langle u, v\rangle \leq 0\}$ poloprostor, pak $A(H) \subset L := A(\mathbb{R}^k)$ je rovněž poloprostor

$$A(H) = \{w \in L : \langle A(A^T A)^{-1} u, w\rangle \leq 0\}.$$

Definice 2.20 (Hodgeho dualita)**.** Je-li V vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a s ortonormální bází $(e_1, \dots, e_n)$ (určující orientaci V), pak lineární operátor $\star : V \to \Lambda_{n-1}(V)$ je definován předpisem

$$v \mapsto \star v, \quad u \wedge (\star v) = \langle u, v\rangle\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad u \in V.$$

Cvičení: Ukažte, že operátor $\star$ je korektně definován. Dále ověřte, že v případě $V = \mathbb{R}^n$

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \star v \iff v = v_1 \times \cdots \times v_{n-1},$$

tedy že $\star$ je v jistém smyslu duální operátor k vektorovému součinu.

Pozn.: Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, pak $\operatorname{int} S := S \setminus \partial S$ (vnitřek plochy S) je k-plocha. Je-li dále τ orientace plochy $\operatorname{int} S$, lze tuto orientaci vždy jednoznačně rozšířit i do bodů kraje S. Zároveň máme v krajních bodech plochy definován i k-rozměrný tečný prostor $T_x S$.

Definice 2.21 (orientace plochy s krajem)**.** Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha s krajem s orientací $x \mapsto \tau_S(x)$, $x \in S$, pak indukovaná orientaci kraje ∂S je definovaná jako

$$\tau_{\partial S}(x) := \star_T \nu_S(x), \quad x \in \partial S,$$

kde $T = T_x S$ je tečný prostor plochy S v bodě x orientovaný ve shodě s orientací S a $\star_T$ značí Hodgeho dualitu v prostoru T.

Pozn.: Pro $\tau_{\partial S}(x) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_{k-1}$ musí vždy být

$$(\nu_S(x), u_1, \ldots, u_{n-1})$$

kladně orientovaná báze tečného prostoru $T_x S$.

Věta 2.14 (Stokesova věta pro poloprostor)**.** *Buď $H \subset \mathbb{R}^n$ uzavřený poloprostor s orientací $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ forma s kompaktním nosičem. Pak*

$$\int_{\operatorname{int} H} d\omega = \int_{\partial H} \omega.$$

Důkaz. Forma ω je tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

a tedy

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(a). Předpokládejme nejprve, že $H = \{(x_1, \ldots, x_n) : \, x_n \leq 0\}$. Pro všechna $i < n$ je pak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i = 0$ (podle Newtonova vzorce, protože všechny parciální derivace mají kompaktní nosič). Platí tedy

$$\int_{\operatorname{int} H} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0,$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{int} H} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Funkce

$$\varphi : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

parametrizuje hranici ∂H. Tato mapa indukuje orientaci $e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$ na ∂H_n a protože $\nu_H = e_n$, je

$$\nu_H \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = (-1)^{n-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

tedy φ indukuje správnou orientaci v případě n lichého a opačnou v případě n sudého. Pak platí

$$\begin{aligned}\int_{\partial H} \omega &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi^* \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{n-1}.\end{aligned}$$

(b) Je-li H obecný poloprostor, existuje shodnost $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\rho(\{x_n \le 0\}) = H$. Forma $\rho^* \omega$ má také kompaktní nosič a podle části (a) platí

$$\int_{\rho^{-1}(\operatorname{int} H)} \rho^*(d\omega) = \int_{\{x_n < 0\}} d(\rho^* \omega) = \int_{\{x_n = 0\}} \rho^* \omega = \int_{\rho^{-1}(\partial H)} \rho^* \omega.$$

Z toho už plyne $\int_{\operatorname{int} H} d\omega = \int_{\partial H} \omega$ podle následujícího lemmatu. □

Lemma 2.15. *Je-li $\rho : U \to V$ C^∞ difeomorfismus otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$ a $S \subset V$ orientovaná k-plocha s atlasem $\mathcal{A}$, pak $\rho^{-1}(S)$ je orientovaná k-plocha s atlasem $\{\rho^{-1} \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{A}\}$ a platí*

$$\int_{\rho^{-1}(S)} \rho^* \omega = \int_S \omega,$$

má-li jeden z integrálů smysl.

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro jednoduchou k-plochu $S = \varphi(U)$. Podle definice platí

$$\begin{aligned}\int_{\rho^{-1}(S)} \rho^* \omega &= \int_U (\rho^{-1} \circ \varphi)^* (\rho^* \omega) = \int_U (\varphi^* \circ (\rho^{-1})^* \circ \rho^*) \omega \\ &= \int_U \varphi^* \omega = \int_S \omega.\end{aligned}$$

□

Věta 2.16 (Stokesova věta)**.** *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k-plocha s krajem, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $S \cap \operatorname{spt} \omega$ je kompaktní, pak*

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že norma $\|\omega\|$ i $\|d\omega\|$ nabývá svého maxima na kompaktu $S \cap \operatorname{spt} \omega$, tedy oba integrály $\int_{\operatorname{int} S} d\omega$ a $\int_{\partial S} \omega$ konvergují.

Nechť dále (h_α) je rozklad jednotky pro S podřízený nějakému (orientovanému) atlasu $\mathcal{A}$. (Rozklad jednotky pro plochu s krajem je definován stejně jako pro plochu bez kraje.) Mapu příslušnou funkci h_α značíme φ_α a příslušný poloprostor H_α. Pro každé α pak podle předchozí věty platí

$$\int_{\operatorname{int} H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)) = \int_{\partial H_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega).$$

Nosiče forem $d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega))$ i $\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)$ jsou obsaženy v U_α, proto můžeme psát

$$\int_{U_\alpha \cap \operatorname{int} H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)) = \int_{U_\alpha \cap \partial H_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega).$$

Podle definice integrálu na jednoduché ploše je tedy

$$\int_{\operatorname{int} S} d(h_\alpha \omega) = \int_{\partial S} (h_\alpha \omega).$$

Z lokální konečnosti rozkladu jednotky plyne (viz cvičení za větou), že jen konečně mnoho nosičů h_α zasahuje kompaktní množinu $S \cap \operatorname{spt} \omega$, a sečtením přes tato α a využitím vztahu $\sum_\alpha h_\alpha = 1$ dostaneme

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

□

Cvičení: Je-li (h_α) rozklad jednotky a K kompaktní, pak $\{\alpha : \operatorname{spt} h_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ je konečná.

Důsledek 2.17 (Věta o divergenci)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^n$ n-plocha s krajem, $\Omega \supset S$ otevřená a $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole třídy C^∞ takové, že $S \cap \operatorname{spt} F$ je kompaktní. Pak*

$$\int_{\operatorname{int} S} \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle \, dS$$

($\nu_S(x)$ je vnější jednotkový normálový vektor k S v bodě $x \in \partial S$).

Důkaz. Použijeme Stokesovu větu pro $(n-1)$-formu

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} F_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega).$$

Platí $d\omega = \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, a podle Stokesovy věty tedy platí

$$\int_{\operatorname{int} S} \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial S} \omega.$$

Zbývá ukázat, že

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle \, dS.$$

Výpočet je ponechán na cvičení. □

Definice 2.22. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *těleso se skoro hladkou hranicí*, jestliže $M = \overline{\operatorname{int} M}$ a hranice ∂M je zobecněná $(n-1)$-plocha (viz Definice 1.8). Označme $\partial_* M$ množinu všech *regulárních* bodů hranice ∂M. Je-li $\Omega \supset \partial M$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$, definujeme

$$\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial^* M} \omega,$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Pozn.: Není těžké ukázat, že $\operatorname{int} M \cup \partial_* M$ je n-plocha s krajem, a tedy $\partial_* M$ je $(n-1)$-plocha orientovaná vnějším normálovým vektorem $\nu_M(x)$, $x \in \partial_* M$.

Věta 2.18 (Zobecněná Stokesova věta I)**.** *Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ těleso se skoro hladkou hranicí, $\Omega \supset M$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$ taková, že $M \cap \operatorname{spt} \omega$ je kompaktní, pak*

$$\int_{\operatorname{int} M} d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Přednáška 2.5.2023

V případě dimenze $n = 2$ je věta o divergenci častěji formulována jako Greenova věta s křivkovým integrálem. Řekneme, že křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je *po částech hladká*, jestliže existují body $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takové, že c je hladká funkce na každém intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ s nenulovou derivací. Není těžké nahlédnout, že pro jednoduchou, uzavřenou a po částech hladkou křivku c obíhající omezenou oblast U, je uzávěr $\overline{U}$ kompaktní těleso se skoro hladkou hranicí.

Důsledek 2.19 (Greenova věta)**.** *Je-li $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá, uzavřená a po částech hladká křivka obíhající omezenou oblast U v kladném smyslu, $\Omega \supset \overline{U}$ otevřená a $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vektorové pole třídy C^∞, pak*

$$\int_U \operatorname{rot} F \, d\lambda^2 = \int_c (F_1 dx + F_2 dy),$$

kde

$$\operatorname{rot} F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

je rotace *pole F a na pravé straně je křivkový integrál druhého druhu.*

Důkaz je ponechán na cvičení (použijte zobecněnou Stokesovu větu, resp. větu o divergenci pro vektorové pole $G = (F_2, -F_1)$).

Dále řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *k-plocha se skoro hladkým krajem*, jestliže $S = \varphi(M)$ pro nějakou k-mapu $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ a těleso se skoro hladkou hranicí $M \subset U \subset \mathbb{R}^k$. Definujeme $\operatorname{int} S := \varphi(\operatorname{int} M)$ *vnitřek* S a $\partial S := \varphi(\partial M)$ *kraj* S, a klademe ($\Omega \supset S$ otevřená)

$$\int_{\operatorname{int} S} \omega := \int_{\operatorname{int} M} \varphi^* \omega, \quad \omega \in \mathcal{E}^k(\Omega),$$

$$\int_{\partial S} \omega := \int_{\partial M} \varphi^* \omega, \quad \omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega).$$

Věta 2.20 (zobecněná Stokesova věta, II)**.** *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha se skoro hladkým krajem, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $S \cap \operatorname{spt} \omega$ je kompaktní. Pak platí*

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Věta plyne z předchozí (zobecněné Stokesovy) věty:

$$\int_{\operatorname{int} S} d\omega = \int_{\operatorname{int} M} \varphi^*(d\omega) = \int_{\operatorname{int} M} d(\varphi^* \omega) = \int_{\partial M} \varphi^* \omega = \int_{\partial S} \omega.$$

3 Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$

3.1 Normála, první a druhá fundamentální forma plochy

Ve zbytku přednášky se budeme zabývat 2-plochami v R^3 třídy C^∞, budeme o nich hovořit stručně jako o plochách. *Orientace* plochy S je dána spojitým zobrazením $x \mapsto N(x)$, které bodu plochy přiřazuje jednotkový normálový vektor. Toto zobrazení

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

se nazývá *Gaussovo zobrazení.* Je-li $\varphi : U \to S$ mapa S (respektující orientaci S), pak

$$N(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)\right\|}.$$

Připomeňme si definici diferenciálu zobrazení na ploše.

Lemma 3.1. *Gaussovo zobrazení je diferencovatelné a platí*

$$DN(x)(T_xS) \subset T_xS.$$

Důkaz. Je-li $\varphi : U \to S$ mapa a $x = \varphi(u)$, pak složené zobrazení $n := N \circ \varphi$ je diferencovatelné, tedy i N je diferencovatelné v x podle definice. Derivováním rovnosti $\langle n(u), n(u)\rangle = 1$ dostaneme $\langle Dn(u)(\xi), n(u)\rangle = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^2$, tedy $Dn(u)(\mathbb{R}^2) \subseteq T_xS$. Tvrzení pak plyne z toho, že $DN(x)(T_xS) = Dn(u)(\mathbb{R}^2)$ (podle definice diferenciálu na ploše). □

Definice 3.1. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$.

1. Lineární zobrazení $L_x = -DN(x) : T_xS \to T_xS$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení.*

2. Bilineární formy na T_xS

$$\begin{aligned} I_x(X,Y) &:= \langle X, Y\rangle, \\ II_x(X,Y) &:= \langle L_xX, Y\rangle, \quad X, Y \in T_xS, \end{aligned}$$

   se nazývají *první* a *druhá fundamentální forma* plochy S v bodě x. Je-li $\varphi : U \to S$ mapa taková, že $x = \varphi(u)$ pro $u \in U$, a označíme-li $n = N \circ \varphi$, pak vzory $I_x(\cdot,\cdot)$ a $II_x(\cdot,\cdot)$ při df_u značíme

$$\begin{aligned} g_u(\xi,\zeta) &= I_u\big(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)\big) = \langle D\varphi(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta)\rangle, \\ h_u(\xi,\zeta) &= II_u\big(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)\big) = -\langle Dn(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta)\rangle, \end{aligned}$$

   což jsou bilineární formy na $\mathbb{R}^2$ s maticemi

$$g_u = \left(\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right)_{i,j=1}^2, \quad h_u = \left(-\left\langle \frac{\partial n}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right)_{i,j=1}^2.$$

Pozn.: I_x i g_u jsou zřejmě symetrické pozitivně definitní bilineární formy (jedná se o restrikci skalárního součinu).

Věta 3.2. *h_u, a tedy i II_x, je symetrická bilineární forma.*

Důkaz. Z rovnosti $\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), n(u)\rangle = 0$ dostaneme derivováním

$$\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial n}{\partial u_j}(u) \right\rangle = 0,$$

z čehož plyne

$$h_u(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle,$$

což je výraz symetrický v i, j. □

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \left(\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle \right)_{i,j=1}^{2}.$$

Cvičení: Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha s atlasem $\mathcal{A}$ a $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost, tedy afinní zobrazení $\rho : x \mapsto b + Rx$ s unitární maticí R, pak $\overline{S} := \rho(S)$ je orientovaná plocha s atlasem $\overline{\mathcal{A}} := \{\rho \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{A}\}$ a její normála $\overline{N}$ a první a druhá fundamentání forma $\overline{g}, \overline{h}$ splňují:

$$\overline{N}(\rho(x)) = \sigma R N(x), \quad \overline{g}_u = g_u, \quad \overline{h}_u = \sigma h_u, \tag{2}$$

kde $\sigma = \det R \in \{-1, 1\}$.

3.2 Hlavní směry a hlavní křivosti plochy

Připomeňme nejprve Frenetovy rovnice křivky $c : I \to \mathbb{R}^3$, které určují derivace vektorů tečny ($\mathbf{t}$), hlavní normály ($\mathbf{n}$) a binormály ($\mathbf{b}$) křivky v případě nenulové křivosti κ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Mezi křivostí křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

Věta 3.3. *Buď S orientovaná plocha a $c : I \to S$ křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Symboly $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ značíme vektor tečny a křivost křivky, $\mathbf{n}(s)$ je vektor hlavní normály v případě $\kappa(s) \neq 0$ v bodě $s \in I$. Pak platí*

$$II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s)\, \langle N(c(s)), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li $\kappa(s) = 0$, výraz na pravé straně je roven nule a nevadí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje mapa $\varphi : U \to S$ plochy taková, že $c(I) \subset \varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \to U$ je regulární parametrizovaná křivka taková, že $c = \varphi \circ u$ na I. Pro každé $s \in I$ platí

$$\begin{aligned} I\!I_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\ &= -\langle Dn(u(s))(u'(s)), D\varphi(u(s))(u'(s))\rangle \\ &= -\langle (n \circ u)'(s), c'(s)\rangle \\ &= \langle (n \circ u)(s), c''(s)\rangle \\ &= \kappa(s)\,\langle N(c(s)), \mathbf{n}(s)\rangle, \end{aligned}$$

přitom čtvrtou rovnost dostaneme derivováním rovnosti $\langle (n \circ u), c'\rangle = 0$, a poslední rovnost plyne z Frenetových vzorců. $\square$

Přednáška 9.5.2023

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

Věta 3.4 (Meusnier)**.** *Nechť S a c jsou jako v předchozí větě a označme $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ úhel mezi normálou $N(c(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě s. Pak*

$$|II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos\theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 3.2. S buď orientovaná plocha, $x \in S$, $0 \neq X \in T_xS$. Pak číslo

$$\kappa_n(X) = \frac{II_x(X,X)}{I_x(X,X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě x a ve směru X.

Pozn.:

1. Zřejmě platí $\kappa_n(\alpha X) = \kappa_n(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, κ_n je tedy skutečně funkcí 'směru' $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
2. Z Meusnierovy věty plyne, že $|\kappa_n(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $x + \langle X, N(x) \rangle$ v bodě x.

Zvolme $x \in S$ pevně a označme

$$T_x^1 S = \{X \in T_xS : \|X\| = 1\}.$$

Funkci κ_n můžeme přirozeně chápat jako funkci na T_x^1S; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 3.3. $X \in T_x^1S$ (resp. αX pro $\alpha \neq 0$) je *hlavním směrem* plochy S v bodě x, jestliže κ_n nabývá extrému v X. Hodnota $\kappa_n(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě x.

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max\{II_x(X,X) : I_x(X,X) = 1\}.$$

Je-li $\varphi : U \to S$ mapa plochy s $\varphi(u) = x$, pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ($\xi \in \mathbb{R}^2$)

$$\min / \max\{h_u(\xi,\xi) : g_u(\xi,\xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání stacionárních bodů funkce

$$\Lambda(\xi,\lambda) = h_u(\xi,\xi) - \lambda\big(g_u(\xi,\xi) - 1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná a ve stacionárních bodech (bodech s nulovým diferenciálem) musí platit

$$d\Lambda_{(\xi,\lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T (h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \tag{3}$$

což může nastat jedině když

$$\det(h_u - \lambda g_u) = 0. \tag{4}$$

Všimněme si, že vektor ξ z (3) je hlavním směrem (resp. jeho obraz $D\varphi(u)\xi$), a hodnota λ z (3) nebo (4) je hlavní křivostí.

Věta 3.5. *Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení* (4) *a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení* (3)*, platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry $X_i = D\varphi(u)\xi_i$ jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení L_x s vlastními čísly λ_i:*

$$L_x(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty λ_i jsou extremálními hodnotami normálové křivosti ve směrech X_i.

Důkaz. Odečtením rovnic (důsledek (3))

$$\begin{aligned} \xi_2^T (h_u - \lambda_1 g_u)\xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T (h_u - \lambda_2 g_u)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (3) dále odvodíme

$$I\!I_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne $L_x X_i = \lambda_i X_i$ a $\kappa_n(X_i, X_i) = \lambda_i$. □

Mohou nastat tyto případy:

1. Rovnice (4) má jediné řešení λ_1, pak $\lambda_1 = \kappa_n(X)$ pro všechna $X \in T_x^1 S$ (každý směr je hlavním směrem):
   (a) $\lambda_1 = 0$, x je *planární bod* plochy,
   (b) $\lambda_1 \neq 0$, x je *kruhový bod* plochy.
2. Rovnice (4) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = D\varphi(u)\xi_i$) jsou navzájem kolmé:

(a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, x je *eliptický bod* plochy,

(b) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, x je *parabolický bod* plochy,

(c) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, x je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 3.4. Funkce $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(x) = \frac{\lambda_1(x)+\lambda_2(x)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 3.6. *Je-li $\varphi : U \to S$ mapa a $\varphi(u) = x$, pak*

$$K(x) = \frac{\det h_u}{\det g_u}, \tag{5}$$

$$H(x) = \frac{g_u^{11}h_u^{22} + g_u^{22}h_u^{11} - 2g_u^{12}h_u^{12}}{2\det g_u} \tag{6}$$

(g_u^{ij}, h_u^{ij} značí prvky matic g_u, h_u).

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (4).

Důsledek: K, H jsou diferencovatelné funkce na ploše S.

Lemma 3.7. *Je-li $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$, pak existuje okolí V bodu x_0 a funkce λ_1, λ_2 diferencovatelné na $S \cap V$ takové, že $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ jsou hlavní křivosti plochy v bodě x pro každý $x \in S \cap V$.*

Důkaz. Zvolme mapu $\varphi : U \to S$ s $\varphi(u_0) = x_0$. Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(\varphi(u))\lambda + K(\varphi(u)) = 0$$

v bodech $(\lambda_1(x_0), u_0)$ a $(\lambda_2(x_0), u_0)$ Podmínka $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$ zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i(x_0), u_0) = 2(\lambda_i(x_0) - H(\varphi(u_0))) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

□

Definice 3.5. Buď S orientovaná plocha.

1. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$.

2. Nenulový vektor $X \in T_xS$ je *asymptotickým směrem* na ploše S v bodě x, jestliže $II_x(X, X) = 0$.

3. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *asymptotickou křivkou*, jestliže $c'(t)$ je asymptotickým směrem pro každé $t \in I$.

Tvrzení 3.8. *Buď S plocha a $x \in S$.*

1. *Je-li $K(x) > 0$, neexistuje v x žádný asymptotický směr.*

2. *Je-li $K(x) < 0$, existují v x právě dva různé asymptotické směry.*

3. *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, existuje v x právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*

4. *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, je v x každý směr asymptotický.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech. □

Věta 3.9. *Buď $\varphi : U \to S$ mapa plochy S. Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, na ploše S je* (7) *hlavní,* (8) *asymptotická, právě tehdy, když vyhovuje rovnici*

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = 0, \tag{7}$$

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0. \tag{8}$$

Důkaz. Pro hlavní křivku využijeme rovnice (3), z níž plyne, že c je hlavní křivka právě tehdy, když pro každé t jsou vektory $g\xi$ a $h\xi$ lineárně závislé, kde $g = g_{u(t),v(t)}$ a $\xi = (u'(t), v'(t))^T$. Toto je dále ekvivalentní vztahu

$$0 = \det(g\xi, h\xi) = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v', & h^{11}u' + h^{12}v', \\ g^{12}u' + g^{22}v', & h^{12}u' + h^{22}v' \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

což je stejná rovnice, jako v (7). Ekvivalence pro asymptotickou křivku plyne přímo z definice. □

Přednáška 16.5.2023

3.3 Geodetiky na ploše

Tvrzení 3.10 (Délka křivky na ploše)**.** *Je-li $c : I \to S$ regulární křivka na ploše S, pak její délka je rovna*

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Je-li $\varphi : U \to S$ mapa S a $c = \varphi \circ u$, pak

$$L(c) = \int_I \sqrt{g_{u(t)}(u'(t), u'(t))}\, dt.$$

Důkaz. Vzorce plynou přímo ze vztahu $L(c) = \int_I \|c'(t)\|\, dt$ a z definice první fundamentální formy plochy. □

Motivace pro definici geodetik. Mějme orientovanou plochu S a regulární parametrizovanou křivku $c : I \to S$ na ploše S. Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu $x = c(t)$ výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon\alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon > 0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_I \|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon = 0$ při libovolné volbě funkce α, což znamená podmínku

$$\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\left\langle c', \Big(\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)')\Big)\right\rangle}{\|c'\|} \\ &= \frac{\alpha}{\|c'\|}\det(c', c'', N \circ c). \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α, právě když jsou vektory $c', c'', N \circ c$ lineárně závislé.

Definice 3.6. Regulární křivka $c : I \to S$ na ploše S se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky ‘být geodetikou na ploše’ je zřejmě invariantní vůči změně parametrů křivky i plochy.

Příklady

1. V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky.
2. Na sféře $\{x^2+y^2+z^2=r^2\}$ jsou geodetiky (právě) všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru r.
3. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.
4. Na válcové ploše $\{x^2+y^2=1\}$ parametrizované mapou

$$f(u,v)=(\cos u,\sin u,v)^T$$

jsou geodetiky ‘spirály’ parametrizované např. $u=\alpha_1 t+\beta_1$, $v=\alpha_2 t+\beta_2$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$ (tyto křivky odpovídají přímkám po ‘rozbalení’ plochy do roviny).

Věta 3.11. *Buď S plocha a $x\in S$. Pak existuje okolí V bodu x tak, že každá geodetika $c: I\to S\cap V$ na ploše S je nejkratší spojnicí na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body $c(a), c(b)$, $a,b\in I$, je větší nebo rovna délce geodetiky $c \mid [a,b]$ a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

[Bez důkazu]

Poznámka: Věta skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné ‘rovnoběžce’ (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami (‘spirálami’) libovolně velké délky.

Definice 3.7. Buď S orientovaná plocha a $c: I\to S$ regulární křivka na ploše S. *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem

$$\kappa_g(t)=\frac{\det\Big(c'(t),c''(t),N(c(t))\Big)}{\|c'(t)\|^3},\quad t\in I.$$

Poznámky:

1. Není těžké ověřit, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
2. Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Věta 3.12. *Pro křivku $c : I \to S$ na ploše S platí*

$$|\kappa_g(t)| = \kappa(t) \sin\theta(t), \quad t \in I,$$

kde $\kappa(t)$ je křivost křivky c v $\mathbb{R}^3$ a $\theta(t) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě t křivky.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizovaná obloukem. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme

$$\begin{aligned}
|\kappa_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\
&= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\
&= \kappa(s)|\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\
&= \kappa(s)|\langle \mathbf{b}(s), N(c(s))\rangle| \\
&= \kappa(s) \sin\theta(s).
\end{aligned}$$

□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 3.4) a nezávislost křivostí na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 3.13. *Pro regulární křivku $c : I \to S$ na ploše S platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:*

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(c'(t)) + \kappa_g^2(t), \quad t \in I.$$

Definice 3.8. Křivka $c : I \to S$ na ploše S je *parametrizovaná geodetika*, jestliže je geodetika a navíc platí $\|c'(t)\| =$ konst. na I.

Pozn.: Zřejmě $c : I \to S$ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když pro každé t je vektor $c''(t)$ násobkem normálového vektoru $N(c(t))$ plochy. (Derivováním vztahu $\langle c'(t), c'(t)\rangle = \text{const}$ totiž dostaneme $\langle c'(t), c''(t)\rangle = 0$.)

Definice 3.9 (Christoffelovy symboly plochy)**.** Buď $\varphi : U \to S$ mapa plochy S a pišme stručně $\varphi_i := \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, $\varphi_{ij} := \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, 2$. Vektory $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), n(u)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ pro libovolné $u \in U$ a můžeme vyjádřit vektory $\varphi_{ij}(u)$ vzhledem k této bázi:

$$\varphi_{ij}(u) = \Gamma_{ij}^1(u)\varphi_1(u) + \Gamma_{ij}^2(u)\varphi_2(u) + h_u^{ij} n(u). \tag{9}$$

Koeficienty $\Gamma_{ij}^k(u)$ v tomto rozkladu se nazývají *Christoffelovy symboly plochy* v bodě u $(i, j, k = 1, 2)$.

Pozn.: Koeficienty h_u^{ij} v rozkladu (9) jsou příslušné koeficienty matice h_u druhé fundamentální formy plochy, což plyne z rovnosti $\langle \varphi_{ij}(u), n(u)\rangle = h_u^{ij}$.

Cvičení: Platí

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \left(g^{-1}\right) \begin{pmatrix} \langle \varphi_{ij}, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_{ij}, \varphi_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

Rovnice pro parametrizované geodetiky Pro křivku $c = \varphi \circ u : I \to S$ na ploše S platí

$$c'(t) = u_1'(t)\varphi_1(u(t)) + u_2'(t)\varphi_2(u(t))$$

a pro druhou derivaci dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i u_i''\varphi_i + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \varphi_{ij} \\ &= \sum_i u_i''\varphi_i + \sum_i \sum_j u_i' u_j' (\Gamma^1_{ij}\varphi_1 + \Gamma^2_{ij}\varphi_2 + h^{ij} n) \\ &= \sum_k \left(u_k'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma^k_{ij} \right) \varphi_k + \sum_i \sum_j h^{ij} n \, u_i' u_j'. \end{aligned}$$

Aby c byla parametrizovaná geodetika, musí být koeficienty u φ_k v posledním vyjádření nulové. Tím jsme odvodili následující větu.

Věta 3.14 (Rovnice pro geodetiky)**.** *Křivka $c = \varphi \circ u : I \to S$ na ploše S s mapou φ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když*

$$\begin{aligned} u_1'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma^1_{ij} &= 0, \\ u_2'' + \sum_i \sum_j u_i' u_j' \Gamma^2_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Výše uvedená soustava je soustavou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvojici funkcí $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ a z teorie takovýchto rovnic plyne:

Věta 3.15. *Buď S plocha a $x \in S$. Ke každému vektoru $0 \neq X \in T_xS$ existuje právě jedna parametrizovaná geodetika $c : I \to S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$.*