

9. cvičení (27.11.2025)

1) Plouky s krajem

k-mapa s krajem : $\varphi: U \subset H \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$

- H k -rozm. podprostor v $\mathbb{R}^k$
- U rel. otevřená v H

značení : $\text{int } U = U \cap \text{int } H$, $\partial U = U \cap \partial H$
(relativní vnitřek a hranice)

$S \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha s krajem, ∂ allora S

$$\partial S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi(\partial U_\varphi), \quad \text{int } S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi(\text{int } U_\varphi)$$

($\varphi: U_\varphi \rightarrow S$)

~~Tan~~ lemy prostor : $T_x S$... podprostor ($x \in \partial S$)
 $\tilde{T}_x S := \text{lin}(T_x S)$... k-rozm. prostor ($x \in \text{int } S$)

Pr.: Ukažte, že $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq \frac{a}{2}\}$

je 2-plocha s krajem ($a > 0$).

Najděte allora S ~~pomocí sfér. souř.~~
pomocí grafu funkce a polárních souřadnic.

~~(b) pomocí stereograf. projekce
a polárních souř.~~

2. Lemma: Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená,

$$F, G \in C^1(\Omega), \quad S := \{x \in \Omega : F(x) = 0, G(x) \leq 0\},$$

$$(*) \quad \nabla F(x), \nabla G(x) \text{ lin. nezávislé, } x \in S.$$

Pak S je $(n-1)$ -plocha s krajem. ~~a pro $x \in S$~~

$$\text{je } \nabla G(x) = \frac{\nabla G(x)}{\|\nabla G(x)\|}.$$

Dk.: Necht $x \in S$. Množina $\tilde{S} := \{F(x) = 0\} \supset S$ je $(n-1)$ -plocha (pokud $\nabla F \neq 0$), tedy ex.

$(n-1)$ -mapa $\varphi: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \tilde{S}$, $x = \varphi(u) \in \varphi(U)$.

Pokud $G(x) < 0$, pak $x \in \text{int } S$ a vhodná restrikce φ je mapou s (krajem) S .

Necht $G(x) = 0$. Položíme $h(u) := G \circ \varphi(u)$.

Pokud $\nabla h(u) = 0$, máme $\nabla h(u) = \nabla G(x) D\varphi(u)$

(matricově, gradienty jsou řádky) $\Rightarrow \nabla G(x) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$

$\forall i \leq n-1$, tedy $\nabla G(x) = c \cdot \nabla F(x)$, což je spor s (*).

Tedy $\nabla h(u) \neq 0$, ~~a podle věty o impl. funkcích~~

$M := \{u \in U : h(u) = 0\}$ je $(n-2)$ -plocha a na okolí $u' \in U$ bodu u je $M \cap U' = (\text{graf } g) \cap U'$

pro nějak. C^1 -funkci $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ def. na

otevř. podm. podprostor dim. $n-2$;

$$\text{BÚNO } W \subset \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$$

Změna souřadnic:

$$\varphi: \begin{cases} u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \\ v = (u_1, \dots, u_{n-2}, \varphi(u_1, \dots, u_{n-2}) - u_{n-1}) \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi} := \varphi \circ \psi : W \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$(n-1)$ -mapa s krajem S ;

$$\tilde{\varphi}(v) \in S \Leftrightarrow v_{n-1} \leq 0$$

3) Indukování orientace kraje

$$x \in \partial S \subset S: \quad \tau_S(x) = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{orientace } S \text{ v } x$$

$$\tau_{\partial S}(x) = u_1 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \quad \text{orientace } \partial S \text{ v } x$$

$\nu_S(x)$... jednot. vněj. norm. vektor

$$\tau_S(x) = \nu_S(x) \wedge \tau_{\partial S}(x) \quad (\Leftrightarrow \tau_{\partial S}(x) = \star_{(\mathbb{T}_x S)} \nu_S(x))$$

$\Rightarrow (\nu_S(x), u_1, \dots, u_{k-1})$ je kladně orientovaná báze $\tilde{\mathbb{T}}_x S$ (shodně s $(v_1, \dots, v_k)$)

Př. Sféra S ^(z př. 1) je orientovaná normalovým polem směřujícím „ven“ z koule. Najděte induk. orientaci ∂S .

- 4) $S \subset \mathbb{R}^3$ 2-plocha s krajem, $x \in \partial S$.
- $N(x) \in S^2 \dots$ normálový vektor orientovaný
 - $\nu_S(x) \dots$ vnější norm. vektor v S
 - $t(x) \dots$ ležící vektor určující orientaci ∂S

Pak $\det(N(x), \nu_S(x), t(x)) > 0$.

Ukažte.