

2. cvičení (9.10.2025)

Připomínkové definice:  $k$ -mapa,  $k$ -plocha v  $\mathbb{R}^n$

1) Sféra  $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(a) Ukážte, že  $S^2$  je 2-plocha (implicitně  
zadaná  $\left( \begin{array}{l} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \nabla F \neq 0 \text{ na } S^2 \end{array} \right)$ )

(b) Najděte atlas sestávající z grafů funkcí

(c) Ukážte, že  $\varphi : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ ,  
 $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , je 2-mapa.  
(věta z předchozího!) Popište im (obraz  $\varphi$ )

Najděte rotaci  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tak, aby  
 $\varphi$  a  $\psi = \rho \circ \varphi$  tvořily atlas  $S^2$ .

(d) Najděte předpis pro  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
splňující: bod  $\phi(u, v)$  leží v průniku  $S^2$   
s polopřímkou  $\{(tu, tv, t) : t \geq 0\}$ ; najděte  $\phi^{-1}$ .  
Ukážte, že  $\phi$  je mapa, určete im  $\phi$ .

Řešení:

$$\phi^{-1}: \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \mid \underbrace{(x, y, z) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}}_{\text{im } \phi}$$

$$\phi: \begin{cases} x = \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases}$$

- 2) Uvedte příklad 2-plochy v  $\mathbb{R}^3$ , která je
- kompaktní
  - omezená neložpaktá
  - neomezená uzavřená
  - neomezená neuzavřená

- 3) Najděte prostou parametrizovanou 2-plochu v  $\mathbb{R}^3$ , která není mapou.

$$\varphi(u, v) = (u^3 - 4u, u^2 - 4, v), \quad u \in (-2, 4), \quad v \in (0, 1)$$

$$\lim_{u \rightarrow -2} \varphi(u, v) = (0, 0, v) = \varphi(2, v)$$

$\varphi^{-1}$  není spojitá!

4) Plocha má jednoznačně určenou dimenzi,  
 tedy: pokud  $S = \varphi(U) = \varphi(V)$  pro  
 $k$ -mapu  $\varphi: U \rightarrow S$  a  $l$ -mapu  $\varphi: V \rightarrow S$ ,  
 pak  $k=l$ .

Dle:  $T_x S$  má dim.  $k$  i  $l \Rightarrow k=l$ .

5) Kvadráty v  $\mathbb{R}^3$

elipsoid:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

jednodílný hyperboloid:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

dvoudílný hyperboloid:  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

paraboloid:  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  eliptický

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  hyperbolický

degenerované:

kon:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

válec:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(ověřte, že jsou to plochy!)

6) Tečný prostor - připomenutí definice

Popište tečný prostor  $T_x S$  plochy zadané:

(a) mapou  $\gamma: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ ,  $\gamma(u) = x$

(b) explicitně:  $S = \text{graf } h$ ,  $h: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

(c) implicitně:  $S = \{x \in B: f(x) = 0\}$

$$f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$(T_x S = \{z: \langle z, \nabla f_i(x) \rangle = 0, i=1, \dots, n-k\})$$

$$c: I \rightarrow S \text{ křivka, } x = c(t_0), f(c(t)) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt} f_i(c(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c(t)) c'_j(t)$$

$$= \langle \nabla f_i(x), c'(t) \rangle$$

7) Najděte rovnici tečné roviny pro

(a)  $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  (jednoduchý hyperb.)

(b)  $S = \{z = x^2 - y^2\}$  (hyperbolický paraboloid)

$$(a) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} S = \{(x, y, z) : xx_0 + yy_0 - zz_0 = 0\}$$

(pročeri počátkem (z def.),  
nemí posunuta do počátku  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  !)

$$(b) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, -2y_0, -1)$$

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} S = \{(x, y, z) : 2xx_0 - 2yy_0 - z = 0\}$$

8) hyperbolické funkce: 
$$\left. \begin{aligned} \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \\ \sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} \end{aligned} \right\} u \in \mathbb{R}$$

•  $\cosh' = \sinh, \sinh' = \cosh$  ↑  
prosta

•  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

•  $\cosh^2 u + \sinh^2 u = \cosh(2u)$

$$\varphi: \begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \cosh u \sin v \\ z = \sinh u \end{cases} \quad \left| \quad u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi) \right.$$

— mapa  $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

$\varphi^{-1}$ :  $u = \sinh^{-1} z$   
 $v = \arg(x, y)$  — hlavní hodnota argumentu z UKA