

11. cvičení (11.12.2025)

1) $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \quad (r > 0)$

zvolte normálu a spočítejte 1. a 2. fund. formy.

Sféř. souřadnice:

$$\varphi \begin{cases} x = r \cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases} \left| \begin{array}{l} u \in (-\pi, \pi) \\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \right.$$

$$N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$$

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad h_{u,v} = \begin{pmatrix} -r \cos^2 v & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

2) Obecná rotační plocha:

rotace kolem z osy $c(u) = (p(u), 0, q(u))^T$ kolem osy z ;
 $p(u) > 0, \quad p'(u)^2 + q'(u)^2 > 0.$

$$\varphi: \begin{cases} x = p(u) \cos v \\ y = p(u) \sin v \\ z = q(u) \end{cases} \quad u \in \mathbb{I}, \quad v \in (-\pi, \pi)$$

normála: $n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{p'^2 + q'^2}} (-q' \cos v, -q' \sin v, p')$

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} p'^2 + q'^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \quad h_{u,v} = \frac{1}{\sqrt{p'^2 + q'^2}} \begin{pmatrix} p'q'' - q'p'' & 0 \\ 0 & pq' \end{pmatrix}$$

3) R • uniformní matice 3×3 ($R^T R = I$)
 Paš

$$R u \times R v = (\det R) R(u \times v), \quad u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Ověřte (z def. vekt. součinu).

4) $S \subset \mathbb{R}^3$ orient. plocha s atlasem $\mathcal{A}$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ shodnost}, \quad \varphi: x \mapsto b + R x \quad (R^T R = I)$$

$\bar{S} := \varphi(S)$ orient. plocha s atlasem $\{\varphi \circ \varphi: \varphi \in \mathcal{A}\}$

Její normála splňuje:

$$\underline{\bar{N}(\varphi(x)) = (\det R) R(N(x)), \quad x \in S.}$$

Ukažte.

5) Spočítejte normálu a 1. a 2. fund. formy
 pro šroubovou plochu s mapou

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

($b > 0$ pevné).