

10. cvičení (4.12.2025)

1) Věta o divergenci jako důsledek Stokesovy věty:

$M \subset \mathbb{R}^n$ těleso se svou hladkou hranicí

$\Omega \supset M$ otev., $\omega \in E^{n-1}(\Omega)$, $M \cap \text{spt } \omega$ kompaktní

$$(*) \quad \int_{\text{int } M} d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (\text{Stokesova v.})$$

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vekt. pole $F \in C^1$

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Ukážte: (a) $d\omega = (\text{div } F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(b) $\langle \tau_{\partial_x M}(x), \omega(x) \rangle = \langle \nu_M(x), F(x) \rangle, x \in \partial_x M$

(c) $\int_{\partial_x M} \omega = \int_{\partial M} \langle \nu_M, F \rangle dS$

Tedy (*) $\Rightarrow \int_{\text{int } M} \text{div } F dX^n = \int_{\partial M} \langle \nu_M, F \rangle dS$

($\nu_M(x) \dots$ jednot. vněj. norm. vektor $\perp M$ v $x \in \partial_x M$)
($\tau_{\partial_x M}(x) \dots$ orientující $(n-1)$ -vektor pro $\partial_x M$)

2) $M = \{|x| + |y| + |z| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$

Spočítejte $\int_M x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$.

(Použijte Stokesovu větu.)

~~[5]~~

3) Plocha se skoro hladkým krajem:

$$S = \varphi(M) \subset \mathbb{R}^n$$

- $\varphi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa

- $M \subset U$ ležící se skoro hlad. hranicí

- $\text{int } S := \varphi(\text{int } M)$ — vnitřek S (k -plocha)

- $\partial S := \varphi(\partial M)$ — kraj S
(zobecněná $(k-1)$ -plocha)

$$\partial_* S := \varphi(\partial_* M) \text{ — } (k-1)\text{-plocha}$$

- $\text{int } S \cup \partial_* S$ je k -plocha s krajem

4) Ukážte, že $(\sqrt{2} < a < \sqrt{3})$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1, x, y, z \geq 0\}$$

je 2-plocha se skoro hladkým krajem.

(použijte mapu $\varphi(x, y) = (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$).

5)

$$S = \{z = x^2 + y^2, -1 \leq xy \leq 1\}$$

- zobec. 2-plocha

- orientované normaly N_S splňujú

$$\langle N_S, e_3 \rangle > 0.$$

Spočíteť $\int_{\partial S} xz \, dy$. (použiť Stokesovu vetu.)