

1. cvičení (2.10.2025)

11

1) Objem rovnoběžnostěnu

$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, \quad P(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

$$\lambda^n(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

(TM(1)) (důkaz indukci)

2) V nult. prostor nad $\mathbb{R}$, $\dim V = k$
- se skal. součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$

(a) $(f_1, \dots, f_k)$ ON báze V

$$x = x^1 f_1 + \dots + x^k f_k \in V \dots [x] = (x^1, \dots, x^k)$$

$$\phi: x \mapsto [x] : V \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ - izomorfismus}$$

- zachovává skal. součin:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_i x^i f_i, \sum_j y^j f_j \right\rangle = \sum_i \sum_j x^i y^j \langle f_i, f_j \rangle \\ &= \sum_i x^i y^i = \langle [x], [y] \rangle \end{aligned}$$

Def. $\lambda_V(B) := \lambda^k(\phi(B))$, $B \subset V$ bod.

- lebesgueova míra na V

(přímá definice - ϕ je izometrie)

21 cvičení: λ_V je míra, určená na volbě
ON báze $(f_1, \dots, f_k)$

(b) $v_1, \dots, v_k \in V$, $P(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$
- rovnoběžnostěn

$$\begin{aligned} \lambda_V(P(v_1, \dots, v_k)) &= \lambda^k(\phi(P(v_1, \dots, v_k))) \\ &= \cancel{|\det|} = \lambda^k(P([v_1], \dots, [v_k])) \\ &= |\det([v_1], \dots, [v_k])| \\ &\quad \parallel \\ &\quad L \text{ (matice } k \times k) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\det(L^T L)}$$

$$L^T L = \left(\langle [v_i], [v_j] \rangle \right)_{i,j=1}^k = \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^k$$

Def.: Gramova matice vektorů

$$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n: \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^k$$

- Gramův determinat $\dots \det(\dots)$

3) $V \subset \mathbb{R}^n$ podprostor dim. k , λ_V leh. mka ³
 1 skel. součin z $\mathbb{R}^n$

$$v_1, \dots, v_k \in V$$

$$\lambda_V(P(v_1, \dots, v_k)) = \sqrt{\det(L^T L)}$$

$$L = (v_1, \dots, v_k) \text{ matice } n \times k$$

$L^T L$... Gramova matice

Pr.: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$L^T L = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda_V(P(v_1, v_2)) = \sqrt{9} = 3.$$

4) Cauchy - Binetův vzorec

Věta: A, B ... matice $n \times k$. Pak

$$(*) \quad \det(A^T B) = \sum_{|I|=k} (\det A_I) (\det B_I),$$

kde součet probíhá přes $I = \{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$

a A_I, B_I jsou matice $k \times k$ s řádky z I .

4) Dk... $A = (a_1, \dots, a_k), B = (b_1, \dots, b_k)$

Obe strany rovnice (*) jsou lineární funkce vektorů $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$. Rovnost tedy stačí uvažovat pro případ $a_i = e_{p(i)}, b_j = e_{q(j)}$

$p, q: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

$(e_1, \dots, e_n)$ kanon. báze

(a) pokud p nebo q není prosté: $0 = 0$.

~~(b)~~ $I := \{p(1), \dots, p(k)\}, J := \{q(1), \dots, q(k)\}$

(b) $I \neq J \Rightarrow 0 = 0$

(c) $I = J$: prohozením pořadí dvou vektorů v I nebo v J způsobíme změnu znam. na obou stranách (*).

(d) $I = \{p(1) < \dots < p(k)\}, J = \{q(1) < \dots < q(k)\}$
 $\dots 1 = 1. \quad \square$

Důsledek: (A) $\det(A^T A) = \sum_{|I|=k} (\det A_I)^2$.

(B) $\text{rank } A = k \Rightarrow \exists I: |I|=k, A_I \text{ reg.}$

5) Vektorový součin v $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)

15

$$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

$L: w \mapsto \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}) \dots$ lin. zob.

$$\Rightarrow \exists! v \in \mathbb{R}^n: Lw = \langle v, w \rangle, w \in \mathbb{R}^n$$

Def.: $v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$, kde:

$$\langle w, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(w, v_1, \dots, v_{n-1}), w \in \mathbb{R}^n$$

v souřadnicově:

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\det(e_i, v_1, \dots, v_{n-1}) \right)_{i=1}^n$$

$n=2$: $v \mapsto x \times v$ (análog operace)

$$x \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad (\text{otočení o } \frac{\pi}{2})$$

$n=3$:

$$u \times v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

6) Vlastnosti:

$$(1) \quad v_1 \times \dots \times v_{n-1} = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_{n-1} \text{ lin. z\u00e1v.}$$

$$(2) \quad \langle v_i, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = 0, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$(3) \quad v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = (\operatorname{sgn} \sigma) v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

$$(4) \quad \|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\lambda_V(P(v_1, \dots, v_{n-1}))} \\ = \det \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^{n-1}$$

$$\text{Dk. (4): } \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle$$

$$= \det(v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1})$$

$$= \|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| \sqrt{\lambda_V(P(v_1, \dots, v_{n-1}))}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{podle (2) - } v_1 \times \dots \times v_{n-1} \text{ je kolm\u00fd na} \\ \text{lin. obal } v_1, \dots, v_{n-1} \end{array} \right)$$