

Počítačová algebra: Cvičení 6

2. prosince 2021

1. Naprogramujte funkce na hledání kořenů rovnice pomocí metody bisekce, metody regula falsi a Newtonovy metody. Použijte je k aproximaci $\sqrt{7}$. Porovnejte rychlost konvergence pro různé volby počátečních hodnot.

(Jako toleranci lze zvolit např. 10^{-8} .)

2. Uvažujte funkce

$$f(x) = x^2 + x - 6,$$

$$g(x) = x^3,$$

$$h(x) = 1.2 + 2x^2 - x - e^{-x}.$$

Může Newtonova metoda pro různé počáteční volby vést k různým výsledkům? Co nej-přesněji rozhodněte, jak se bude pro konkrétní volby počátečního bodu Newtonova metoda chovat (Jsou splněny podmínky konvergence? Pokud ano, tak ke kterému kořeni bude metoda konvergovat?).

3. Pro funkce z předchozího příkladu určete, jestli pro ně rychleji konverguje Newtonova metoda, nebo metoda půlení intervalu. Jako míru tolerance zvolte 10^{-8} .
4. Uvažujte funkci $f(x) = \tan(x) + x - 2$, která má na intervalu $[0, 2]$ (alespoň jeden) kořen. Najděte ho pomocí metody bisekce a Newtonovy metody. Je předem zaručenou, že metody budou konvergovat?
5. Newtonova metoda občas selhává. Určete, kde nastane problém, když ji zkusíme aplikovat na následující funkce s počátečním bodem $x_0 = 1$:

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$,

(b) $f(x) = 2x - x^2$,

(c) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0, \\ \sqrt{x} & x \geq 0. \end{cases}$

6. (Newtonovy fraktály) Newtonova metoda umí být numericky velmi nestabilní. Dobře se to projevuje například při hledání kořenů v komplexní rovině. Uvažujme například polynom $f(z) = z^3 - 1$ v komplexní proměnné. Pro každý bod $\mathbb{C}$ umíme určit, ke kterému (pokud k nějakému) kořeni tohoto polynomu konverguje. Pokud na základě tohoto přiřadíme každému bodu roviny barvu, výsledkem bude tzv. Newtonův fraktál. Zkuste si tento fraktál v Sagi vykreslit.

(K vykreslení hodnot matice M se může hodit `matrix_plot(M, cmap=['red', 'green', 'blue'])`)