28/05/2018

Étienne MATHERON
Professeur
Université d'Artois

Rapport sur la thèse de Noé de Rancourt

*Théorie de Ramsey sans principe des tiroirs
et applications à la preuve de
dichotomies d'espaces de Banach*

La thèse de Noé de Rancourt se situe au confluent de la théorie de Ramsey infinie, de la théorie des jeux infinis et de la géométrie des espaces de Banach. Il importe de préciser tout de suite que cette thèse contient un grand nombre de résultats profonds, et qu'il semble très difficile de lui rendre pleinement justice.

Le chapitre I de la thèse commence par un aperçu détaillé du contexte dans lequel se situe le travail de Noé de Rancourt. Très agréable à lire, ce chapitre témoigne d'une belle lucidité et d'une grande maturité mathématique. Pour permettre d'apprécier pleinement les contributions nouvelles de Noé de Rancourt, il me parait nécessaire d'en faire un résumé assez détaillé (certainement beaucoup moins convaincant que l'original).

De façon très simplifiée, la théorie de Ramsey infinie vise à démontrer des énoncés du type suivant (qu'on appellera des énoncés de type "Ramsey infini authentique"). On se donne un `espace` M_0 possédant une certaine structure, relativement à laquelle existe une notion naturelle de `sous-espace`. Pour tout `sous-espace` M de M_0, appelons `suite infinie` dans M toute suite (infinie) d'éléments de M possédant une certaine "forme" liée à la notion d'`espace` considérée, et notons $[M]$ l'ensemble de ces `suites infinies`. Il s'agit de voir pour quels coloriages de $[M_0]$ en 2 couleurs il est vrai que tout `sous-espace` M de M_0 possède un `sous-espace` N tel que toutes les suites de $[N]$ aient la même couleur; ou, si on préfère, pour quels sous-ensembles $\mathcal{X}$ de $[M_0]$ il est vrai que tout `sous-espace` M possède un `sous espace` N tel que $[N] \subseteq \mathcal{X}$ ou $[N] \subseteq \mathcal{X}^c$. (Un tel $\mathcal{X}$ est dit *Ramsey.*) Le prototype d'un tel résultat est le théorème classique de Mathias-Silver (1968, 1970), où M_0 est l'ensemble des entiers naturels ω, où les `sous-espaces` sont les parties infinies de ω, et où les `suites infinies` doivent être strictement croissantes : tout sous-ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ de $[\omega]$ est Ramsey.

Un point important pour la suite est que le cas *borélien* du théorème de Mathias-Silver (*i.e.* le théorème de Galvin-Prikry) peut se déduire de la détermination des jeux boréliens sur les réels : c'est l'approche suivie par Kastanas (1984), qui associe à tout ensemble $\mathcal{X} \subseteq [\omega]$ une famille de jeux sur les réels dont la détermination entraine la propriété de Ramsey pour $\mathcal{X}$. Tanaka (1992) a ensuite donné une version "déployée" des jeux de Kastanas, qui permet de donner une preuve du théorème de Mathias-Silver pour les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$ en utilisant uniquement la détermination des jeux $\mathbf{\Sigma}^0_2$ sur les réels.

On connait maintenant d'innombrables énoncés de type Ramsey infini authentique, et le livre de Stevo Todorcevic *Introduction to Ramsey spaces* montre comment il est possible de les englober dans une théorie abstraite très générale et très élégante. Un point crucial de cette théorie est que pour démontrer un résultat de type Ramsey infini authentique, on a toujours besoin de ce qu'on appelle un "principe des tiroirs", qui est la version 1-dimensionnelle du résultat qu'on souhaite établir (étant donné un coloriage de M_0 en 2 couleurs, tout `sous-espace` M de M_0 contient un `sous-espace` N dont tous les points sont de la même couleur). Pour le théorème de Mathias-Silver le principe des tiroirs est trivial (il revient à dire que si on partitionne un ensemble infini d'entiers en 2 morceaux, l'un des 2 morceaux doit être infini). Mais dans d'autres situations, ce principe des tiroirs est déjà un résultat difficile : c'est le cas par exemple pour un théorème classique de Milliken (1975), où les `sous-espaces` sont les blocs-sous-espaces d'un espace vectoriel dénombrable sur le corps $\mathbb{F}_2$ relativement à une base fixée), où les `suites infinies` sont les suites de blocs, et où le principe des tiroirs est un théorème dû à Hindman (1974).

Il existe cependant, en géométrie des espaces de Banach, des résultats de type "Ramsey infini" qui ne rentrent pas dans le cadre "authentique". Le premier résultat de ce type est un théorème dû à Gowers (datant de 1994 mais publié sous sa forme définitive en 2002), qu'on appellera dans la suite *théorème Ramseyen de Gowers*. Ce théorème est l'outil principal utilisé par Gowers pour établir son fameux *théorème de dichotomie*, d'après lequel tout espace de Banach possède une sous-espace qui est ou bien à base inconditionnelle, ou bien héréditairement indécomposable (HI); et comme on le sait, ceci lui a permis de résoudre une conjecture célèbre de Banach : le seul espace de Banach *homogène* (*i.e.* isomorphe à tous ses sous-espaces fermés) est l'espace de Hilbert ℓ_2.

Soit E un espace de Banach possédant une base de Schauder $(e_i)_{i\geq 0}$. (Dans ce qui suit, tous les espaces de Banach sont de dimension infinie, et tous les sous-espaces sont fermés.) Les `sous-espaces` de E sont les bloc-sous-espaces relativement à (e_i), et les `suites infinies` sont les suites de blocs normalisées. Pour tout `sous-espace` X de E, on considère le *jeu de Gowers* G_X où le joueur **I** joue des `sous-espaces` $X_0, X_1, X_2 \ldots$ de X et le joueur **II** joue des vecteurs $x_0, x_1, x_2 \ldots$ formant une `suite infinie`, avec la contrainte $x_i \in X_i$. Le théorème Ramseyen de Gowers affirme que si $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_1$ de $[E]$, alors tout `sous-espace` X possède un `sous-espace` Y qui ou bien vérifie $[Y] \subseteq \mathcal{X}^c$, ou bien est tel que le joueur **II** possède une stratégie dans G_Y lui permettant de produire une `suite` "proche" de $\mathcal{X}$. Le fait que l'une des 2 alternatives s'exprime en termes d'un jeu et n'ait donc pas une forme authentiquement Ramsey est lié à l'absence d'un principe des tiroirs général.

Il se trouve que l'on dispose d'un principe des tiroirs précisément quand l'espace E est c_0-*saturé*; et dans ce cas la conclusion du théorème Ramseyen de Gowers est la suivante : ou bien $[Y] \subseteq \mathcal{X}^c$, ou bien toutes les `suites` de $[Y]$ sont proches de $\mathcal{X}$. On a ainsi presque un énoncé de type Ramsey authentique, la seule différence étant que l'une des deux alternatives fait intervenir une approximation.

Le théorème Ramseyen de Gowers a inspiré de nombreux travaux. En particulier, Rosendal (2010) a obtenu une version "exacte" de ce théorème (i.e. sans approximation). Le cadre est cette fois celui d'un espace vectoriel E *dénombrable* (donc sur un corps $\mathbb{K}$ dénombrable) muni d'une base algébrique $(e_i)_{i\geq 0}$. Les `sous-espaces` sont les bloc-sous-espaces, les `suites infinies` sont toutes les suites d'éléments de E, et le jeu de Gowers G_X est défini comme précédemment. De plus, on définit un nouveau jeu F_X, qu'on appelle le *jeu de Gowers asymptotique*, où le joueur **I** est astreint à jouer des `sous-espaces` *de codimension finie dans* X. (Ce jeu est donc plus difficile que G_X pour **I**.) Un ensemble $\mathcal{X} \subseteq [E] = E^\omega$ est dit *stratégiquement Ramsey* si tout `sous-espace` X possède un `sous-espace` Y tel que **I** possède une stratégie dans F_Y pour produire une `suite` $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ appartenant à $\mathcal{X}^c$, ou bien **II** possède une stratégie dans G_Y pour produire une `suite` appartenant à $\mathcal{X}$. (Dans chacune des deux alternatives, **I** ou **II** a donc une stratégie dans le jeu qui est le plus difficile pour lui.) Le *théorème Ramseyen de Rosendal* s'énonce alors comme suit : tout sous-ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_1$ de E^ω (où E est muni de la topologie discrète), est stratégiquement Ramsey. Ce résultat permet d'obtenir sans trop de difficultés une preuve purement combinatoire du théorème Ramseyen de Gowers.

Dans le même article, Rosendal introduit deux autres jeux ressemblant au jeu de Gowers asymptotique, mais où les deux joueurs contribuent à la fabrication de la `suite` résultat. Ces jeux sont appelés les *jeux de Gowers contradictoires*, et notés A_X et B_X (où X est toujours un `sous-espace`). Dans ces deux jeux, c'est le joueur **II** qui commence, en jouant un `sous-espace` X_0 de X; puis **I** joue une paire (x_0, Y_0) où x_0 est un vecteur et Y_0 est un `sous-espace` de X avec la contrainte $x_0 \in X_0$, **II** répond par une paire (y_0, X_1) avec la contrainte $y_0 \in Y_0$ et ainsi de suite. De plus, dans A_X le joueur **I** est astreint à jouer des `sous-espaces` de codimension finie, alors que dans B_X c'est le joueur **II** qui doit se plier à cette règle. Le résultat du jeu est la `suite` $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$. Un ensemble $\mathcal{X} \subseteq E^\omega$ est dit *contradictoirement Ramsey* s'il est "stratégiquement Ramsey en remplaçant les jeux F_Y et G_Y par les jeux A_Y et B_Y". Un des intérêts de cette propriété est qu'elle fournit une conclusion "symétrique" : les deux alternatives ont exactement la même forme. De plus, il est facile de voir qu'un ensemble $\mathcal{X} \subseteq E^\omega$ est stratégiquement Ramsey si et seulement si l'ensemble $\mathcal{X}' = \{(x_i) \in E^\omega;\ (x_{2i}) \in \mathcal{X}\}$ est contradictoirement Ramsey; par conséquent, si Γ est une classe de parties d'espaces polonais stable par pré-images continues, alors l'énoncé "tout ensemble de classe Γ est contradictoirement Ramsey" est plus fort que l'énoncé "tout ensemble de classe Γ est stratégiquement Ramsey". Dans un article ultérieur (2014), Rosendal montre que tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^0_3$ ou $\mathbf{\Pi}^0_3$ est contradictoirement Ramsey, et pose la question de savoir si cela peut être étendu à tous les ensembles boréliens, voire tous les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$ *modulo* un axiome de grand cardinal.

Le théorème de dichotomie de Gowers a lui aussi inspiré de nombreux travaux, et en fait ouvert toute une direction nouvelle de recherche en géométrie des espaces de Banach : l'objectif – proposé par Gowers lui même – serait d'obtenir suffisamment de dichotomies intéressantes pour parvenir à une classification "vague" des espaces de Banach (une classification "précise" étant essentiellement hors de portée du fait de la trop grande complexité de la relation d'isomorphisme entre espaces de Banach séparables). Je me contenterai ici de citer un résultat de dichotomie dû à Ferenczi et Rosendal (2009) dont la preuve utilise des jeux inspirés du jeu de Gowers : tout espace de Banach X possède un sous-espace Y qui est ou bien *minimal* (*i.e.* Y se plonge dans tous ses sous-espaces), ou bien *tendu* (ce qui signifie que Y possède une base de Schauder (e_i) telle que "très peu" de sous-espaces définis par une sous-suite de (e_i) contiennent un espace de Banach donné; en particulier, Y se plonge dans très peu de ses sous-espaces).

Enfin, la résolution du "problème de l'espace homogène" de Banach mène à une question beaucoup plus générale : si X est un espace de Banach non isomorphe à ℓ_2, "combien" de sous-espaces peut-il possèder à isomorphisme près? En particulier, existe-t-il des espaces de Banach possèdant exactement 2 sous-espaces à isomorphisme près? (Dans la suite, un tel espace s'appelera *espace de Johnson*.) Dans cette direction, la conjecture la plus forte possible, dûe à Ferenczi et Rosendal (2005) est la suivante : si X est un espace de Banach séparable non isomorphe à ℓ_2, alors X est *ergodique*, ce qui signifie que la relation d'isomorphisme entre sous-espaces de X est (au sens de la théorie des relations d'équivalence définissables) plus compliquée que la relation d'équivalence $\mathbf{E}_0$ de presque égalité sur 2^ω.

Le travail de Noé de Rancourt contient des avancées remarquables dans toutes les directions de recherche qui viennent d'être évoquées. Je vais maintenant tenter d'en décrire quelques unes.

Dans le chapitre II, Noé de Rancourt propose un cadre abstrait très général pour une théorie de Ramsey infinie *avec ou sans principe des tiroirs*. La notion centrale est celle d'*espace de Gowers*. Sans entrer dans les détails, un espace de Gowers est une structure incluant un ensemble de `sous-espaces` P et un ensemble de `points` X, l'ensemble X étant supposé dénombrable. L'ensemble P est muni de deux relations de quasi-ordre $\leq$ et $\leq^*$, et on dispose également d'une relation binaire $\lhd$ entre `points` et `sous-espaces` (ou plus généralement entre *suites finies de* ***`points`*** et `sous-espaces`; dans la suite on ne considérera que la version simplifiée). Un petit nombre d'axiomes très naturels doivent être satisfaits. En particulier, la relation $\leq$ est plus forte que la relation $\leq^*$, et il est possible d'effectuer des *diagonalisations* : si (p_i) est une suite $\leq$-décroissante de `sous-espaces`, il existe un `sous-espace` p^* tel que $p_i \leq^* p_i$ pour tout i. Les deux exemples à garder à l'esprit sont les suivants.

- L'*espace de Mathias-Silver*. Ici les `sous-espaces` sont les parties infinies de ω et les `points` sont les éléments de ω. Les relations $\leq$ et $\leq^*$ sont respectivement l'inclusion et la presque inclusion. Et la relation $\lhd$ est la relation d'appartenance : $x \lhd M$ si et seulement si $x \in M$.
- L'*espace de Rosendal* associé à un corps dénombrable $\mathbb{K}$. Ici, les `points` sont les vecteurs non nuls d'un K-espace vectoriel dénombrable E muni d'une base $(e_i)_{i\geq 0}$, et les `sous-espaces` sont les blocs-sous-espaces de E. La relation $\lhd$ est à nouveau l'appartenance. La relation $\leq$ est l'inclusion, et $M \leq^* N$ si et seulement si N contient un `sous-espace` de M de codimension infinie.

Dans ce cadre abstrait, on peut définir les jeux de Gowers, les jeux de Gowers asymptotiques et les jeux de Gowers contradictoires. Il est remarquable qu'avec un tel degré de généralité, Noé de Rancourt parvienne à obtenir les meilleurs résultats possibles : tout ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ est stratégiquement Ramsey, et tout ensemble borélien est contradictoirement Ramsey. On a ainsi une version abstraite du théorème Ramseyen de Rosendal, et on obtient comme cas très particulier une réponse positive à la 1ère partie de la question de Rosendal mentionnée plus haut.

La preuve de la propriété de Ramsey contradictoire pour les ensembles boréliens est une adaptation très astucieuse de la méthode de Kastanas. En particulier, le résultat est en dernière analyse déduit de la détermination des jeux boréliens sur les réels. Dans le même esprit, il découle de la preuve donnée que dans la théorie $ZF + DC + AD_{\mathbb{R}}$, si l'ensemble des `sous-espaces` P est une partie d'un espace polonais, alors tout sous-ensemble $\mathcal{X} \subseteq X^\omega$ est contradictoirement Ramsey. Il est très tentant de conjecturer (comme le fait Noé de Rancourt) que ceci reste vrai dans $ZF + DC + AD$. Appliqué à l'espace de Mathias-Silver, un tel résultat entrainerait – *cf* plus bas – que sous AD, tous les sous-ensembles de $[\omega]$ sont Ramsey (ce qui résoudrait un problème ouvert célèbre).

A l'inverse, en considérant un espace de Gowers trivial (P réduit à un singleton), on voit que la propriété de Ramsey contradictoire (dans tous les espaces de Gowers) pour une classe Γ donnée entraine la détermination des jeux de classe Γ sur les entiers. En particulier, on ne peut pas espérer démontrer la propriété de Ramsey contradictoire pour les ensembles $\mathbf{\Sigma}_1^1$ sans axiome supplémentaire; et plus généralement, la propriété de Ramsey contradictoire pour tous les ensembles de classe Γ (et dans tous les espaces de Gowers) apparait comme intermédiaire entre la détermination des jeux de classe Γ sur les entiers et celle des jeux de classe Γ sur les réels.

Par ailleurs, comme déjà mentionné plus haut, la propriété de Ramsey stratégique pour les ensembles boréliens découle formellement de la propriété de Ramsey contradictoire. Mais on peut faire mieux : en utilisant un argument de "déploiement", Noé de Rancourt obtient la propriété de Ramsey stratégique pour les ensembles $\mathbf{\Sigma}_1^1$ en utilisant uniquement la propriété de Ramsey contradictoire pour les ensembles $\mathbf{\Pi}_2^0$ (et donc uniquement la détermination des jeux $\mathbf{\Pi}_2^0$).

Ces résultats généraux ont cependant leurs limitations : en particulier, Noé de Rancourt montre que si l'espace de Gowers est "suffisamment non trivial", alors il existe des ensembles $\mathcal{X} \subseteq X^\omega$ qui ne sont pas stratégiquement Ramsey, et même des ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_2$ sous l'hypothèse $V = L$. La preuve de ce résultat est longue et délicate; en particulier, on a besoin d'utiliser une "version dénombrable" du jeu de Gowers où les deux joueurs jouent uniquement des `points`.

À l'inverse, avec des axiomes supplémentaires les résultats peuvent être étendus. Par exemple, s'il existe un cardinal mesurable au dessus de $|P|$, alors tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est contradictoirement Ramsey (ce qui répond à la 2ème partie de la question de Rosendal) et tout ensemble $\mathbf{\Sigma}^1_2$ est stratégiquement Ramsey; et s'il n'existe pas de cardinal mesurable $\kappa \leq |P|$, alors tout ensemble "Souslinien homogène" (traduction approximative de "homogeneously Souslin") est contradictoirement Ramsey.

Dans le même chapitre, Noé de Rancourt introduit une version abstraite du principe des tiroirs dans le cadre des espaces de Gowers. Par exemple, l'espace de Mathias-Silver satisfait (trivialement) au principe des tiroirs; et l'espace de Rosendal associé à un corps $\mathbb{K}$ y satisfait (non trivialement) si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, mais n'y satisfait pas si $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$.

Un des intérêts du principe des tiroirs est que lorsque l'espace de Gowers y satisfait, on peut obtenir une forme "symétrique" de la propriété de Ramsey stratégique : si $\mathcal{X} \subseteq X^\omega$ est stratégiquement Ramsey, alors pour tout `sous-espace` p, il existe un `sous-espace` $q \leq p$ tel que dans F_q, le joueur **I** a une stratégie pour atteindre $\mathcal{X}$ ou une stratégie pour atteindre $\mathcal{X}^c$. Lorsqu'on particularise ce résultat à l'espace de Mathias-Silver, on montre avec un peu de travail supplémentaire qu'un ensemble $\mathcal{X} \subseteq [\omega]$ est Ramsey si et seulement si il est stratégiquement Ramsey relativement à l'espace de Mathias-Silver.

La satisfaction ou la non-satisfaction du principe des tiroirs pour un espace de Gowers donné a d'autres implications théoriques très intéressantes. Par exemple, lorsque le principe des tiroirs est satisfait, les propriétés de Ramsey stratégique et contradictoire deviennent équivalentes (en particulier, tous les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$ sont contradictoirement Ramsey), et la propriété de Ramsey stratégique est auto-duale (et n'est donc pas stable par projections si $V = L$). À l'inverse, lorsque le principe des tiroirs n'est pas satisfait, la propriété de Ramsey contradictoire pour tous les ensembles d'une certaine classe Γ entraine la détermination des jeux de classe Γ sur les entiers (en particulier, elle n'est pas prouvable pour les ensembles $\mathbf{\Sigma}^1_1$ sans axiome supplémentaire) et la propriété de Ramsey stratégique est stable par projections (et n'est donc pas auto-duale si $V = L$).

Dans la définition d'un espace de Gowers, l'ensemble X des `points` est supposé dénombrable. Ceci est tout à fait crucial pour les preuves, et en fait pour la validité des énoncés eux même : Noé de Rancourt montre en effet au début du chapitre III qu'en toute généralité, les résultats du chapitre II ne sont plus valables si on autorise X à être non-dénombrable. Pour pallier à cet inconvénient (et en vue d'applications ultérieures), Noé de Rancourt introduit la notion d'*espace de Gowers* *approximatif*. Un espace de Gowers approximatif est essentiellement un espace de Gowers où l'ensemble des `points` est un espace polonais muni d'une distance d. Les divers jeux de Gowers sont définis de la même façon; mais comme dans le théorème Ramseyen de Gowers, les propriétés de Ramsey (stratégique et contradictoire) pour un ensemble $\mathcal{X} \subseteq X^\omega$ font intervenir une approximation : au lieu d'exiger que les stratégies produisent des `suites` appartenant à $\mathcal{X}$ ou à $\mathcal{X}^c$, on accepte qu'elles produisent des `suites` seulement *proches* de $\mathcal{X}$ (ou de $\mathcal{X}^c$), ceci étant quantifié à l'aide de la distance d. Lorsque X est dénombrable et que d est la distance discrète, on retrouve les propriétés du chapitre II.

Dans ce cadre plus général, Noé de Rancourt obtenir les mêmes résultats optimaux qu'au chapitre II : tout ensemble borélien est contradictoirement Ramsey, et tout ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ est stratégiquement Ramsey. Il introduit ensuite une version "approximative" du principe des tiroirs, et montre que si ce principe est satisfait, alors, *modulo* quelques hypothèses supplémentaires, on peut obtenir un théorème Ramseyen de Gowers abstrait (valable pour des structures encore plus générales que les espaces de Gowers approximatifs) dont la conclusion donne directement un énoncé de Ramsey *authentique*. On atteint ici un degré d'abstraction particulièrement élevé, et il tout à fait remarquable que les choses fonctionnent aussi bien. Comme applications immédiates de ce résultat, on retrouve le théorème de Mathias-Silver, le théorème Ramseyen de Gowers et sa version pour les espaces de Banach c_0-saturés.

Dans le chapitre IV, Noé de Rancourt utilise sa théorie pour obtenir de nouveaux résultats de dichotomie en géométrie des espaces de Banach. Ces résultats sont motivés par la "conjecture ergodique" de Ferenczi-Rosendal (tout espace de Banach séparable non ergodique est isomorphe à ℓ_2) et la "conjecture de Johnson" (les espaces de Johnson n'existent pas, *i.e.* il n'existe pas d'espace de Banach admettant exactement 2 sous-espaces à isomorphisme près). Noé de Rancourt propose deux conjectures plus faibles qui paraissent extrêmement pertinentes :

(1) Tout contre-exemple à la conjecture ergodique possède un sous-espace à base inconditionnelle non isomorphe à ℓ_2.
(2) Tout espace de Johnson possède une base inconditionnelle.

Noé de Rancourt ne démontre pas ces conjectures, mais obtient deux résultats de dichotomie qui incitent à l'optimisme. La particularité de ces dichotomies est qu'elles "évitent ℓ_2", au sens où elles ne produisent que des sous-espaces non-isomorphes à ℓ_2. Le point crucial ici est l'observation suivante : si E est un espace de Banach séparable, alors l'ensemble de ses sous-espaces *non isomorphes à* ℓ_2 est muni de façon canonique d'une structure d'espace de Gowers approximatif (l'ensemble des `points` étant la sphère unité de E). On voit ici tout l'intérêt d'avoir construit une théorie abstraite la plus générale possible.

La 1ère dichotomie obtenue est une version "évitant ℓ_2" du théorème de dichotomie de Gowers : si E est un espace de Banach non-isomorphe à ℓ_2, alors E possède un sous-espace X non isomorphe à ℓ_2 qui ou bien possède une FDD inconditionnelle

(F_i) "fortement non hilbertienne" au sens où la distance de Banach-Mazur de F_i à $\ell_2^{\dim(F_i)}$ tend vers l'infini, ou bien est *héréditairement Hilbert-primaire* (HHP), ce qui signifie qu'aucun sous-espace de X ne peut se décomposer en somme directe de deux sous-espaces non-isomorphes à ℓ_2. En combinant ceci avec un résultat de Ferenczi (non publié), on en déduit que tout espace de Banach non-ergodique possède un sous-espace qui est soit à base inconditionnelle, soit HHP; et en rajoutant un résultat dû à Anisca (2007), on obtient que si X est un espace de Johnson, alors ou bien X possède une base inconditionnelle, ou bien X est HHP. Pour démontrer la conjecture (2), il suffirait donc de prouver qu'un espace HHP non isomorphe à ℓ_2 possède au moins 3 sous-espaces non-isomorphes; ce qui parait assez plausible si on se souvient du résultat "classique" de Gowers et Maurey selon lequel un espace *HI* n'est isomorphe à aucun de ses sous-espaces.

La 2ème dichotomie obtenue est une version "évitant ℓ_2" de la dichotomie de Ferenczi-Rosendal mentionnée plus haut : si E est un espace de Banach non isomorphe à ℓ_2, alors E possède un sous-espace X non isomorphe à ℓ_2 qui ou bien est *minimal parmi les espaces non-hilbertiens* (MNH), ce qui signifie que X se plonge dans tous ses sous-espaces non-isomorphes à ℓ_2, ou bien est *tendu pour les espaces non-hilbertiens* (TNH), ce qui signifie que X possède une FDD (F_i) "fortement non-hilbertienne" telle que "très peu" de sous-espaces définis par une sous-suite de (F_i) contiennent un espace de Banach non isomorphe à ℓ_2 donné. Une conséquence très intéressante de cette dichotomie est que tout contre-exemple à la conjecture ergodique possède un sous-espace MNH. (Plus précisément, ceci découle de la dichotomie et du fait que tout espace TNH est ergodique, résultat également démontré dans ce chapitre.) En combinant ceci avec la conséquence de la 1ère dichotomie mentionnée plus haut, on en déduit en particulier que pour démontrer la conjecture (1), il suffirait de prouver qu'un espace HHP ne peut pas être MNH; ce qui ne semble pas hors de portée.

Pour démontrer ses 2 dichotomies, Noé de Rancourt utilise à plein les résultats généraux des chapitres précédents; mais pour autant les dichotomies ne tombent pas toute seules : il y a encore beaucoup de travail purement Banachique à faire, parfois extrêmement technique. Il faut également préciser que Noé de Rancourt n'a pas "seulement" démontré ces dichotomies : il a également inventé les notions d'espaces HHP, MNH et TNH qui interviennent dans leur formulation.

Le chapitre se conclut par une preuve nouvelle du résultat de Gowers et Maurey mentionné plus haut (un espace HI n'est isomorphe à aucun de ses sous-espaces). Cette preuve utilise à nouveau des jeux de type Gowers (ainsi qu'un peu de théorie de Fredholm), et permet de traiter simultanément les espaces réels et les espaces complexes (ce qui pas le cas de la preuve originale).

Au vu de tout ce qui précède, la conclusion devrait être claire : la thèse de Noé de Rancourt est un travail de très grande qualité, bien au dessus des standards habituels en ce qui concerne la maturité mathématique, les avancées conceptuelles, l'inventivité, la qualité esthétique des résultats obtenus et la virtuosité technique. De plus, malgré la grande complexité de certaines preuves, la rédaction reste toujours limpide. On peut ajouter que du fait de leur très grande généralité, les résultats abstraits obtenus par Noé de Rancourt sont sans aucun doute amenés à trouver de nombreuses applications, en géométrie des espaces de Banach ou ailleurs.

À titre personnel, je regrette seulement que la thèse n'ait pas été écrite en français, car je soupçonne qu'en plus de tout le reste, Noé possède également un certain talent littéraire. Il va de soi que je recommande très chaleureusement la soutenance.

É. Matheron