Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 13 : Second théorème d'incomplétude, ensembles parfaits

12 et 15 janvier 2018

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

L'exercice 1 est à préparer avant le TD et sera corrigé tout au début de la séance.

I. Second théorème d'incomplétude de Gödel

♦ Exercice 1.

Expliquer pourquoi, il n'est pas possible, en prenant pour seule hypothèse que ZFC est consistante, de prouver la consistance de ZFC + Cons(ZFC). En déduire qu'on ne peut pas, en supposant seulement la consistance de ZFC, prouver la consistance de l'existence d'un cardinal inaccessible.

(Ici, Cons(ZFC) désigne l'énoncé “ZFC est consistante”.)

♦ Exercice 2.

Soit T une théorie dans le langage $\mathcal{L} = \{\in\}$ des ensembles, qui contient ZFC. Montrer que si T est consistante, alors la théorie suivante, écrite dans le langage $\mathcal{L}' = \{\in, M\}$ où M est un symbole de constante, est également consistante : $T + T^M +$ “M est un ensemble transitif dénombrable”. (T^M désigne la collection des énoncés de la forme φ^M, où φ est un axiome de T.)

Ce résultat semble contredire celui de l'exercice précédent ; pourquoi n'est-ce pas le cas ?

Exercice 3 (Théorème de Löb)**.**

On supposera dans cet exercice qu'on a codé les formules, la notion de satisfaction, et la théorie ZFC elle-même dans les univers modèles de ZFC (les formules codées dans l'univers seront appelées ici *formules internes*) ; pour une formule φ, on notera $\ulcorner\varphi\urcorner$ son code dans l'univers (qui est une formule interne). On note $Pr_{\mathrm{ZFC}}(x)$ la formule a une variable libre exprimant le fait que x est un énoncé interne et que toute structure $\mathcal{M}$ satisfaisant ZFC satisfait également x (ce qui signifie moralement que x est prouvable dans ZFC).

Soit φ un énoncé ; on suppose que ZFC $\vdash Pr_{\mathrm{ZFC}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \longrightarrow \varphi$. Montrer que ZFC $\vdash \varphi$.

II. Théorème de l'ensemble parfait, analyse de Cantor-Bendixson

♦ **Exercice 4.**

Dans cet exercice, les ordinaux seront munis de la topologie de l'ordre.

1. Soit α un ordinal. Montrer que sa dérivée de Cantor-Bendixson, α', est l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α qui sont de la forme $\omega\beta$, pour β un ordinal non-nul.
2. Soient α et δ deux ordinaux, avec $\delta > 0$; notons A l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α qui sont de la forme $\delta\beta$, pour β un ordinal non-nul ; on munira cet ensemble de la topologie induite par celle de α. Montrer qu'il existe un ordinal γ tel que l'application $\begin{array}{ccc} \gamma & \longrightarrow & \alpha \\ \beta & \longmapsto & \delta(1+\beta) \end{array}$ soit un homéomorphisme de γ sur A.
3. Soient α et ξ deux ordinaux. Montrer que la $\xi^{\text{ième}}$ dérivée de Cantor-Bendixson de α, notée $\alpha^{(\xi)}$, est l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α qui sont de la forme $\omega^{\xi}\beta$, pour β un ordinal non-nul.
4. En déduire, en fonction de l'écriture sous forme normale de Cantor d'un ordinal α, le rang de Cantor-Bendixson de α.

Exercice 5.

On notera $\mathcal{C}$ l'espace de Cantor.

1. Montrer qu'il existe un point p de $\mathcal{C}$ et une partition $(A_n)_{n<\omega}$ de $\mathcal{C}\backslash\{p\}$ telles que :
   — Tous les A_n soient des ouverts-fermés de $\mathcal{C}$ homéomorphes à $\mathcal{C}$;
   — Toute suite $(x_n)_{n<\omega} \in \prod_{n<\omega} A_n$ converge vers p.
2. Montrer que pour tout ordinal dénombrable α, il existe un fermé F_α de $\mathcal{C}$ dont le rang de Cantor-Bendixson est α.

♣ **Exercice 6** (Le théorème de l'ensemble parfait pour les boréliens)**.**

1. Soit X un espace polonais. Montrer qu'il existe une distance complète d sur X, compatible avec la topologie de x, et majorée par 1.
2. Soit (X, d) un espace polonais muni d'une distance complète, dont on notera τ la topologie. Soit F un fermé de X. On définit une distance d' sur X par, pour tous $x, y \in X$:
   — Si $x, y \in F$, alors $d'(x, y) = d(x, y)$;
   — Si $x \in F$ et $y \notin F$, ou si $x \notin F$ and $y \in F$, alors $d'(x, y) = 1$;
   — Si $x, y \notin F$, alors $d'(x, y) = d(x, y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$.

   Montrer que d' est bien une distance sur X ; on notera τ' la topologie qu'elle définit. Montrer que $\tau \subseteq \tau'$, que τ' est polonaise, et que τ et τ' ont les mêmes tribus boréliennes. Montrer de plus que F est ouvert-fermé pour τ'.
3. Soit X un ensemble, et $(\tau_n)_{n<\omega}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de topologies polonaises sur X, ayant toutes la même tribu borélienne. On notera τ la topologie engendrée par $\bigcup_{n<\omega} \tau_n$. Pour tout $n < \omega$, on choisira d_n une distance sur X compatible avec la topologie τ_n, complète, et majorée par 1 (dont l'existence à été montrée à la question 1). On pose, pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = \sum_{n<\omega} \frac{d_n(x,y)}{2^n}$. Montrer que d est une distance sur X, et qu'elle est compatible avec la topologie τ. En déduire que τ est polonaise, et montrer qu'elle a la même tribu borélienne que les τ_n.

4. Soit X un ensemble, τ une topologie polonaise sur X, et B un borélien de (X,τ). Montrer qu'il existe une topologie polonaise τ' sur X, ayant la même tribu borélienne que τ, telle que $\tau \subseteq \tau'$, et pour laquelle B est un ouvert-fermé.
5. Montrer le théorème de l'ensemble parfait pour les boréliens des espaces polonais : tout borélien non-dénombrable d'un espace polonais contient un ensemble parfait, et est en particulier de cardinalité $2^{\aleph_0}$.