Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 12 : Consistance relative

22 décembre 2017 et 8 janvier 2018

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

L'exercice 1 est à préparer avant le TD et sera corrigé tout au début de la séance.

♦ **Exercice 1** (Cardinaux inaccessibles)**.**

Montrer que la notion "κ est un cardinal inaccessible" est absolue entre V et V_α pour tout ordinal limite α. En déduire que ZFC ne démontre pas l'existence d'un cardinal inaccessible.

♦ **Exercice 2** (Ensembles définissables en termes d'ordinaux)**.**

Le but de cet exercice est de montrer que si ZF est consistante, alors ZFC l'est aussi. Dans la suite, on travaillera dans un modèle de ZF.

La construction des termes et formules (du langage des ensembles), la définition de structure et celle de la satisfaction qui ont été données dans la partie théorie des modèles de ce cours sont en fait valables dans un modèle quelconque de ZF. Il suffit pour cela de coder les symboles $=$, $\in$, $\neg$, $\wedge$, (,) et $\exists$ par les entiers de 0 à 6 et les variables par les entiers restants, et de définir les termes et formules par induction à partir de ces variables et symboles, comme dans le cours (par exemple, si Φ et Ψ sont des formules, alors le triplet $(\vee, \Phi, \Psi)$ en sera aussi une). Les "formules" ainsi obtenues sont des objets de l'univers, on les appellera dans la suite des *formules internes*, et on les notera par des majuscules : Φ, Ψ... (pour les différentier des vraies formules qu'on appellera, elles, tout simplement des formules et qu'on notera comme d'habitude en minuscules : φ, ψ...). On notera Form l'ensemble (dénombrable) des formules internes. On peut alors, étant donné un ensemble M muni d'une relation binaire ε, définir par induction sur la complexité de $\Phi \in \text{Form}$ la relation $(M, \varepsilon) \models \Phi(\bar{a})$, pour $\bar{a}$ un uplet d'éléments de M dont la taille est le nombre de variables libres de Φ, exactement comme dans le cours. L'ensemble Form et la relation de satisfaction interne ainsi définis sont alors définissables sans paramètres dans l'univers (si ce n'est pas clair pour vous, je vous invite à relire le début du cours de théorie des modèles et vous n'aurez aucune difficulté à vous en convaincre ; vous pouvez également aller lire le chapitre 5 de *Théorie des ensembles* de Krivine où c'est fait de façon très détaillée).

On dira qu'un ensemble x est *définissable en termes d'ordinaux* s'il existe $n < \omega$, $\Phi \in \text{Form}$ à $n+1$ variables libres et $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ une suite finie d'ordinaux tels que l'ensemble x soit l'unique élément de V_α pour lequel on a $V_\alpha \models \Phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (ici, on a muni, comme toujours, V_α de la restriction de la relation d'appartenance). On notera OD la classe des ensembles définissables en termes d'ordinaux, dont on montre facilement qu'elle est définie par une formule $OD(x)$ sans paramètres. On dira qu'un ensemble x est *héréditairement définissable en termes d'ordinaux* s'il est définissable en termes d'ordinaux et si tous les éléments de sa clôture transitive le sont également. On notera HOD la classe des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux, qui est définie par une formule sans paramètres $HOD(x)$.

1. (a) Construire une formule $\psi(x, y)$ sans paramètres qui définit un bon ordre ensembliste sur la classe des suites finies d'ordinaux. (On rappelle qu'un bon ordre est ensembliste si pour tout x, la classe des ensembles strictement inférieurs à x pour cette relation est un ensemble).

   (b) Construire une formule $\chi(x, y)$ sans paramètres qui définit un bon ordre ensembliste sur la classe OD.

   (c) Construire une classe fonctionnelle F définie par une formule sans paramètres qui est une bijection de la classe Ord sur la classe OD.

2. Soit $\varphi(x)$ une formule ayant pour seuls paramètres des ordinaux. On suppose qu'il existe un unique ensemble a tel que $\varphi(a)$. Montrer que a est définissable en termes d'ordinaux.

   Cette question, ainsi que la précédente, montrent que "un ensemble a appartient à OD si et seulement s'il existe une formule $\varphi(x)$ dont les seuls paramètres sont des ordinaux, pour laquelle a est l'unique ensemble tel que $\varphi(a)$". Évidemment, on n'aurait pas pu définir OD de cette façon puisqu'on ne peut pas quantifier sur les formules...

3. Soit $\varphi(x)$ une formule ayant pour seuls paramètres des éléments de OD. Déduire des questions 1.(c) et 2 que s'il existe un unique ensemble a tel que $\varphi(a)$, alors a est dans OD. En déduire que si x est dans OD, alors $\bigcup x$ et $\mathcal{P}(x)$ sont aussi dans OD.

4. Montrer que HOD est une collection transitive, et que x est dans HOD si et seulement si x et dans OD et tous les éléments de x sont dans HOD.

5. Montrer que HOD satisfait ZFC. (On pourra montrer que l'axiome de choix est satisfait en le prenant sous la forme du théorème de Zermelo.)

Exercice 3 (Modèles de Fraenkel-Mostowski)**.**

Considérons $(\mathcal{U}, \in)$ un modèle de $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF}$), et F une classe fonctionnelle qui est une bijection de l'univers dans lui-même. Pour deux objets x et y de $\mathcal{U}$, on notera $x \in' y$ lorsque $x \in F(y)$.

1. Montrer que $(\mathcal{U}, \in')$ est modèle de $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF}$).

2. On appelle *atome* un ensemble x tel que $x = \{x\}$. Montrer que si $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF}$) est consistante, alors la théorie $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF} +$ "Il existe un atome" (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF} +$ "Il existe un atome") l'est également. En déduire que AF n'est pas démontrable dans $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF}$.

3. Soient x et y deux ensembles. Montrer que si $(\mathcal{U}, \in)$ satisfait "Il existe une bijection de $F(x)$ dans $F(y)$", alors $(\mathcal{U}, \in')$ satisfait "Il existe une bijection de x dans y".

4. Montrer que si $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$ (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF}$) est consistante, alors la théorie $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF} +$ "Il existe un ensemble infini dénombrable dont tous les éléments sont des atomes" (resp. $\mathrm{ZFC} - \mathrm{AF} +$ "Il existe un ensemble infini dénombrable dont tous les éléments sont des atomes") l'est également.

Exercice 4 (Modèles de Fraenkel-Mostowski, suite)**.**

Soit T la théorie $\mathrm{ZF}-\mathrm{AF}+$ "la classe des atomes est un ensemble infini dénombrable" $+\forall x\,(x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \in x(y \cap x = \varnothing \vee y = \{y\}))$ (le dernier axiome peut être vu comme une variante d'AF disant que les seuls contre-exemples à AF sont les atomes). Le but de cet exercice est de montrer la consistance relative de T et d'étudier quelques-unes de ses propriétés.

1. Dans cette question, on travaillera dans un modèle de la théorie $\mathrm{ZFC}-\mathrm{AF}+$ "Il existe un ensemble infini dénombrable dont tous les éléments sont des atomes", dont la consistance relative a été montrée à l'exercice précédent. On notera A un tel ensemble d'atomes. On définira par récurrence une classe fonctionnelle $\alpha \mapsto W_\alpha$ sur Ord par :
   - $W_0 = A$;
   - $W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha)$;
   - Pour α limite, $W_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} W_\xi$.

   On notera W la classe qui est réunion des W_α pour $\alpha \in Ord$.

   (a) Montrer que tous les W_α, ainsi que W, sont transitifs.

   (b) Montrer que tout atome appartenant à W est dans A.

   (c) Montrer que W est modèle de T. En déduire que si $\mathrm{ZF}-\mathrm{AF}$ est consistante, alors T l'est aussi.

2. On travaille désormais dans un modèle de T, dont on notera A l'ensemble des atomes. Montrer que la classe W définie à la question précédente est l'univers entier.

3. Montrer le schéma de réflexion pour T : si φ est une formule, alors la classe des ordinaux α tels que φ est absolue entre W et W_α est un club ordinal.

4. Construire une formule $\varphi(x, y, z)$ sans paramètres telle que pour toute bijection $\sigma : A \longrightarrow A$, $\varphi(x, y, \sigma)$ définisse une classe fonctionnelle $y = F_\sigma(x)$ qui est un automorphisme de l'univers et dont la restriction à A est σ. Montrer que tout automorphisme de l'univers est de la forme F_σ pour une certaine bijection $\sigma : A \longrightarrow A$.

5. Montrer qu'un automorphisme de l'univers fixe les ordinaux.

♣ **Exercice 5** (AC n'est pas démontrable dans $\mathrm{ZF}-\mathrm{AF}$)**.**

Le but de cet exercice est de montrer que AC n'est pas démontrable dans $\mathrm{ZF}-\mathrm{AF}$. On travaillera dans un modèle de la théorie T étudiée dans l'exercice précédent, dont on notera A l'ensemble des atomes.

De façon similaire à l'exercice 2, on dira qu'un ensemble x est *définissable en termes d'ordinaux et d'atomes* s'il existe $m, n < \omega$, $\Phi \in$ Form à $m+n+1$ variables libres, $(a_1, \ldots, a_m)$ une suite finie d'atomes, et $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ une suite finie d'ordinaux tels que l'ensemble x soit l'unique élément de W_α pour lequel on a $W_\alpha \models \Phi(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On notera OAD la classe des ensembles définissables en termes d'ordinaux et d'atomes ; comme A est définissable sans paramètres, OAD l'est également. On dira qu'un ensemble x est *héréditairement définissable en termes d'ordinaux et d'atomes* s'il est dans OAD et si tous les éléments de sa clôture transitive sont dans OAD. On notera $HOAD$ la classe des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux et d'atomes, qui est elle aussi définissable sans paramètres.

1. Donner une formule $\psi(x, y, z)$ sans paramètres telle que pour tout b dans OAD, il existe une suite finie s d'atomes et une suite finie t d'ordinaux telle que b soit l'unique ensemble pour lequel on a $\psi(b, s, t)$.
2. Soit $\varphi(x)$ une formule ayant pour seuls paramètres des ordinaux et des atomes. On suppose qu'il existe un unique ensemble b tel que $\varphi(b)$. Montrer que b est dans OAD.
3. Soit $\varphi(x)$ une formule ayant pour seuls paramètres des éléments de OAD. Déduire des questions 1 et 2 que s'il existe un unique ensemble b tel que $\varphi(b)$, alors b est dans OAD. En déduire que si x est dans OAD, alors $\bigcup x$ et $\mathcal{P}(x)$ sont aussi dans OAD.
4. Montrer que $HOAD$ est une collection transitive, et que x est dans $HOAD$ si et seulement si x et dans OAD et tous les éléments de x sont dans $HOAD$.
5. Montrer que $HOAD$ satisfait $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$.
6. Soit $b \in OAD$. En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un ensemble fini $c \subseteq A$ tel que pour toute bijection $\sigma : A \longrightarrow A$ fixant tous les éléments de c, on ait $F_\sigma(b) = b$. (On rappelle que F_σ est un automorphisme de l'univers dont la restriction à A est σ, construit dans l'exercice 4.)
7. Montrer que tout ensemble infini d'atomes $x \in OAD$ est cofini. En déduire que $HOAD$ satisfait "toute partie de A est soit finie, soit cofinie".
8. Conclure que $\mathrm{ZF} - \mathrm{AF}$ ne démontre pas AC.