Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 8 : Calculabilité

24 et 27 novembre 2017

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

La question 1 de l'exercice 1 et l'exercice 3 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Machines de Turing

♦ **Exercice 1** (Programmation sur machines de Turing)**.**

Donner une machine de Turing calculant :

1. La somme de deux entiers ;
2. Le produit de deux entiers.

II. La fonction d'Ackermann

On définit la fonction d'Ackermann $A : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ par, pour tous $n, x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} A(0,x) & = & x+1 \\ A(n+1,0) & = & A(n,1) \\ A(n+1,x+1) & = & A(n,A(n+1,x)). \end{array}$$

♦ **Exercice 2** (Généralités)**.**

1. Vérifier que la fonction d'Ackermann est bien définie, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $A : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ satisfaisant les relations ci-dessus.
2. Histoire de se faire peur, exprimer $A(1,x)$, $A(2,x)$ et $A(3,x)$ en fonction de x.
3. Montrer que A est strictement croissante en ses deux arguments.

♦ **Exercice 3** (La fonction d'Ackermann est récursive)**.**

Si $f \in \mathcal{F}_2^*$, définissons $\Gamma(f) \in \mathcal{F}_2^*$ par, pour tous $n, x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(f)(0,x) & = & x+1 \\ \Gamma(f)(n+1,0) & = & f(n,1) \\ \Gamma(f)(n+1,x+1) & = & f(n,f(n+1,x)) \end{array}$$

(où il est entendu que $\Gamma(f)(x)$ n'est pas défini exactement lorsque la formule la définissant fait appel à des fonctions en des points où elles ne sont pas définies).

1. Montrer qu'il existe $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ primitive récursive telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\varphi_i^2) = \varphi_{\alpha(i)}^2$. (On pourra utiliser le théorème s-m-n.)
2. Montrer que la fonction d'Ackermann est récursive.

♦ **Exercice 4** (La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.)**.**

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $A_n = A(n,\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n^k = A_n \circ \ldots \circ A_n$, avec k compositions. On dira qu'une fonction $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *domine* une fonction $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^p$, on ait $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant F(\max(x_1, \ldots, x_n, K))$.

1. Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a $A_n^k(x) \leqslant A_{n+1}(x+k)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$ pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_n^k domine f. On notera aussi $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ est clos par composition.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction obtenue par schéma de récurrence primitif à partir de deux fonctions de $\mathcal{C}_n$ est dans $\mathcal{C}_{n+1}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ contient toutes les fonctions primitives récursives.
3. En déduire que A n'est pas primitive récursive.

Exercice 5 (Graphe de la fonction d'Ackermann)**.**

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\prec$ un bon ordre primitif récursif sur $\mathbb{N}^p$, tel que pour tous $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{N}^p$, si $\max(\bar{x}) < \max(\bar{y})$, alors $\bar{x} \prec \bar{y}$. Montrer qu'il existe $\alpha : (\mathbb{N}^p, \prec) \longrightarrow (\mathbb{N}, <)$ un isomorphisme primitif récursif de réciproque primitive récursive.
2. Montrer qu'il existe une bijection $\alpha : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :
   – $\alpha(0,0,0) = 0$;
   – Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}$, $\alpha(n-1,1,y) < \alpha(n,0,y)$;
   – Pour tous $n, x \in \mathbb{N}^*$ et $y, z \in \mathbb{N}$ avec $z < y$, $\alpha(n,x-1,z) < \alpha(n,x,y)$ et $\alpha(n-1,z,y) < \alpha(n,x,y)$.
3. Montrer que la graphe de la fonction d'Ackermann est primitif récursif. (On pourra utiliser un schéma de récurrence dans le genre de ceux du TD de la semaine dernière, en un peu plus compliqué.) En particulier, il existe une fonction non-primitive récursive dont le graphe est primitif récursif.
4. En déduire, d'une autre façon, que la fonction d'Ackermann est récursive totale.

III. Ensembles récursivement énumérables

♦ **Exercice 6** (Examen 2016)**.**

On dit que deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont *récursivement séparables* s'il existe un ensemble $C \subseteq \mathbb{N}$ récursif tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \varnothing$.

On notera $\phi \in \mathcal{F}_2^*$ une fonction récursive universelle ; on rappelle qu'il s'agit d'une fonction récursive partielle a deux variables, telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_1^*$ récursive partielle à une variable, il existe $i \in \mathbb{N}$ telle que $f = \phi(i, \cdot)$.

1. Soient $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi(x, x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi(x, x) = 1\}$. Montrer que A et B sont deux ensembles récursivement énumérables disjoints, et qu'ils ne sont pas récursivement séparables.
2. Soient $P, Q \subseteq \mathbb{N}$ deux ensembles récursivement énumérables. Montrer qu'il existe $P_0 \subseteq P$ et $Q_0 \subseteq Q$ récursivement énumérables tels que $P_0 \cup Q_0 = P \cup Q$ et $P_0 \cap Q_0 = \varnothing$. (On pourra énumérer simultanément les éléments de P et de Q et dire qu'un élément est dans P_0 s'il a été énuméré pour la première fois en tant qu'élément de P.)
3. En déduire que si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$ disjoints et de complémentaires récursivement énumérables, alors ils sont récursivement séparables.

Exercice 7.

1. Montrer qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ infini est récursif si et seulement s'il est l'image d'une fonction récursive totale $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. En déduire que tout ensemble récusivement énumérable $E \subseteq \mathbb{N}^p$ infini contient un ensemble récursif infini.
3. Construire un ensemble $C \subseteq \mathbb{N}$ co-récursivement énumérable infini qui ne contient aucun sous-ensemble récursif infini. (On pourra formaliser la construction suivante : si $i \in \mathbb{N}$ est tel que le domaine de ϕ_i^1 est infini, alors on notera $\alpha(i)$ l'entier n tel que $n \geqslant 2i$ et $\varphi_i^1(n) \downarrow$ minimisant le couple $(t + n, n)$ pour l'ordre lexicographique, où t est le temps de calcul de $\varphi_i^1(n)$. On prendra alors pour C l'ensemble des entiers n qui ne sont de la forme $\alpha(i)$ pour aucun i.)

IV. Énumération de fonctions récursives

♦ **Exercice 8** (Inexistence de fonctions primitives récursives universelles)**.**

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\psi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ primitive récursive telle que pour toute $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ primitive récursive, il existe $i \in \mathbb{N}$ avec $f = \psi(i, \cdot)$.

(On peut par contre montrer l'existence d'une telle fonction ψ récursive totale.)

Exercice 9 (Ensembles de fonctions récursivement énumérés)**.**

On dit qu'un ensemble E de fonctions récursives partielles (disons à une variable pour fixer les idées) est *récursivement énuméré* s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ récursive partielle telle que pour toute $f \in E$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $f = \psi(i, \cdot)$ (la remarque à la fin de l'exercice précédent, par exemple, signifie que l'ensemble des fonctions primitives récursives est récursivement énuméré).

Montrer que les ensembles suivants de fonctions récursives totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ne sont pas récursivement énumérés :

1. L'ensemble de toutes les fonctions récursives totales ;
2. L'ensemble des fonctions croissantes (resp. strictement croissantes) ;
3. L'ensemble des fonctions injectives ;
4. L'ensemble des fonctions surjectives ;
5. L'ensemble des fonctions bijectives.