Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

# TD de Logique 6 : Élimination des quantificateurs

10 et 13 novembre 2017

*Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.*

**L'exercice 1 est à préparer avant le TD et sera corrigé tout au début de la séance.**

♦ **Exercice 1** (Graphe aléatoire)**.**

Montrer que la théorie des graphes aléatoires élimine les quantificateurs.

On corrigera également en TD l'exercice de l'examen sur les graphes aléatoires. Prenez avec vous le sujet de l'examen, et si vous n'avez pas complètement réussi l'exercice, essayer de le finir sans regarder le corrigé d'ici le TD !

**Exercice 2** (Inspiré du partiel 2015)**.**

Soit $\mathcal{L} = \{<, \sim\}$ (les deux symboles sont des symboles de relation binaire), et $T$ la $\mathcal{L}$-théorie qui dit que :

- $\sim$ est une relation d'équivalence ;
- Les classes de $\sim$ sont convexes pour $<$ (c'est à dire que $\forall x \forall y \forall z\, (x \sim z \wedge x < y < z \longrightarrow x \sim y)$) ;
- L'ordre $<$ induit sur chaque classe d'équivalence un ordre linéaire dense sans extrémité ;
- L'ordre $<$ introduit sur le quotient par $\sim$ un ordre linéaire dense sans extrémités.

Montrer que $T$ est consistante, qu'elle élimine les quantificateurs, et qu'elle est $\omega$-catégorique.

**Exercice 3.**

Donner une exemple de théorie $\aleph_0$-catégorique sur un langage au plus dénombrable, ayant des modèles infinis, et n'éliminant pas les quantificateurs.

♣ **Exercice 4** (Structures ultrahomogènes)**.**

Dans tout l'exercice, on travaillera dans un langage $\mathcal{L}$ fixé, qu'on supposera relationnel et fini (attention, certains résultats de l'exercice ne sont plus vrais dans un langage quelconque). On rappelle qu'un *isomorphisme partiel* entre deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ est un isomorphisme entre une sous-structure de $\mathcal{M}$ et une sous-structure de $\mathcal{N}$ (on considérera ici, abusivement, l'application vide comme un isomorphisme partiel). On dit qu'une $\mathcal{L}$-structure $M$ est *ultrahomogène* si elle est infinie dénombrable et si tout isomorphisme partiel fini entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ se prolonge en un automorphisme de $\mathcal{M}$.

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : si $T$ est une $\mathcal{L}$-théorie complète dont les modèles sont infinis, alors on a équivalence entre :

**(A)** $T$ possède un modèle ultrahomogène ;

**(B)** Tout modèle dénombrable de $T$ est ultrahomogène ;

**(C)** $T$ élimine les quantificateurs ;

et de plus, si ces propriétés sont vérifiées, alors $T$ est $\aleph_0$-catégorique.

On dira qu'un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ de $\mathcal{L}$-structures est *bon* si pour tout isomorphisme partiel fini $\varphi$ entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un isomorphisme partiel fini $\tilde{\varphi}$ entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ prolongeant $\varphi$ et dont le domaine contient $x$. On dira qu'une $\mathcal{L}$-théorie T *a la propriété de va-et-vient* si tout couple de modèles de $T$ est bon.

1. Soient $M$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures infinies dénombrables. Montrer qu'on a équivalence entre :
   – Les couples $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sont bons ;
   – Tout isomorphisme partiel fini entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ se prolonge en un isomorphisme total.
2. Soit $T$ une $\mathcal{L}$-théorie ayant des modèles infinis et ayant la propriété de va-et-vient. Montrer que $T$ est $\aleph_0$-catégorique, élimine les quantificateurs, et que tout modèle infini dénombrable de $T$ est ultrahomogène.
3. Soit $T$ une $\mathcal{L}$-théorie éliminant les quantificateurs. Montrer que $T$ a la propriété de va-et-vient.
4. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures infinies dénombrables avec $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est ultrahomogène si et seulement si $\mathcal{N}$ l'est. (On pourra utiliser la question 1..)
5. Si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on notera $\mathrm{Age}(\mathcal{M})$ l'ensemble des sous-structures finies de $\mathcal{M}$, à isomorphisme près.
   Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Montrer que $\mathrm{Age}(\mathcal{M}) = \mathrm{Age}(\mathcal{N})$. (C'est bien sûr un abus de notation : on veut dire par là que toute sous-structure finie de $\mathcal{M}$ est isomorphe à une sous-structure finie de $\mathcal{N}$, et réciproquement.)
6. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathrm{Age}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Age}(\mathcal{N})$ et $\mathcal{N}$ ultrahomogène. Montrer que le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est bon.
7. Soit $T$ une $\mathcal{L}$-théorie complète ayant un modèle ultrahomogène. Montrer que $T$ a la propriété de va-et-vient.
8. Conclure.

**Exercice 5.**

Soit $K$ un corps. On considère le langage $\mathcal{L} = \{0, +\} \cup \{\lambda_a \mid a \in K\}$, où 0 est un symbole de constante, + un symbole de fonction binaire, et pour tout $a \in K$, $\lambda_a$ un symbole de fonction unaire. On munira naturellement un $K$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ d'une structure de $\mathcal{L}$-structure en interprétant 0 et + comme on pense, et pour tout $a \in K$, $\lambda_a$ par la multiplication par le scalaire $a$.

1. Montrer qu'on peut axiomatiser la classe des $K$-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit $T$ la théorie ainsi obtenue.
2. Soit $\mathcal{V} \models T$. Décrire les sous-structures de $\mathcal{V}$.
3. Montrer que $T$ élimine les quantificateurs.
4. Montrer que tout espace vectoriel admet une base.
5. Montrer que $T$ est catégorique en tout cardinal infini $\kappa > |K|$.
6. Dans le langage $\mathcal{L}'= \{0, +, -\}$, soit $T$ la théorie des groupe abéliens non-triviaux, sans torsion et *divisibles* (c'est à dire tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout élément $x$ du groupe, il existe un élément $y$ du groupe tel que $nx = y$.
   (a) Montrer que tout $\mathbb{Q}$-espace vectoriel non-nul est modèle de $T$. Réciproquement, montrer que tout modèle de $T$ se munit de façon unique d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel compatible avec sa structure de groupe.
   (b) Montrer que $T$ élimine les quantificateurs, est catégorique en tout cardinal non-dénombrable, et est complète.

### ♦ Exercice 6.

Si $(X, <)$ est un ensemble totalement ordonné et $x \in X$, on appelle *successeur de $x$*, s'il existe, le plus petit élément de $X$ strictement supérieur à $x$, et *prédécesseur de $x$*, s'il existe, le plus grand élément de $X$ strictement inférieur à $x$.

Dans le langage des ordres $\mathcal{L} = \{<\}$, on considère la théorie $T$ qui dit que $<$ est un ordre total et que tout élément admet un prédécesseur et un successeur.

1. Montrer que $T$ n'élimine pas les quantificateurs.
2. Montrer que les modèles de $T$ sont, à isomorphisme près, exactement les $X \times \mathbb{Z}$ munis de l'ordre lexicographique, où $(X, <)$ est un ensemble totalement ordonné non-vide.

Le but de la suite de cet exercice est de déterminer quelles sont les sous-structures élémentaires de $X \times \mathbb{Z}$, lorsque $(X, <)$ est un ensemble totalement ordonné non-vide.

3. Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{s, p\}$, où $s$ et $p$ sont des symboles de relation unaire. Soit $T'$ la $\mathcal{L}'$-théorie obtenue à partir de $T$ en ajoutant un axiome qui dit que pour tout $x$, $s(x)$ est le successeur de $x$ et $p(x)$ son prédécesseur. Montrer que tout modèle de $T$ s'enrichit de façon unique en une $\mathcal{L}'$-structure qui est modèle de $T'$. Montrer que toute $\mathcal{L}'$-formule est équivalente, modulo $T'$, à une $\mathcal{L}$-formule.
4. Soit $A \models T'$, dont on notera $\Delta(A)$ le diagramme sans quantificateurs. Montrer que toute $\mathcal{L}'_{\mathcal{A}}$-formule $\varphi(x)$, atomique ou négation d'atomique, à zéro ou une variable libre, est soit prouvée par $T' \cup \Delta(A)$, soit réfutée par $T' \cup \Delta(A)$, soit équivalente, modulo $T' \cup \Delta(A)$, a une disjonction de formules d'une des trois formes suivantes : $x < a$, $x = a$, et $a < x$, où $a$ est un élément de $A$.
5. Montrer que $T'$ élimine les quantificateurs.
6. En déduire que $T$ est complète, et que les $\mathcal{L}$-sous-structures élémentaires de $X \times \mathbb{Z}$, où $(X, <)$ est un ensemble totalement ordonné non-vide, sont exactement les $Y \times \mathbb{Z}$, avec $Y \subseteq X$ non-vide.