Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 5 : Compacité, plongements élémentaires, élimination des quantificateurs

27 octobre et 6 novembre 2017

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

L'exercice 1 et les questions 1. et 2. de l'exercice 2 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Axiomatisations

♦ **Exercice 1** (Propriétés axiomatisables ou non)**.**

Les classes de structures suivantes sont-elles axiomatisables ? Finiment axiomatisables ?

1. Les ensembles infinis, dans le langage $\mathcal{L} = \varnothing$.
2. Les ensembles finis, dans le même langage.
3. Les corps de caractéristique p, pour p un nombre premier, dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times\}$.
4. Les corps de caractéristique nulle, dans le même langage.
5. Les graphes connexes, dans le langage $\mathcal{L} = \{\sim\}$ (on rappelle qu'un *graphe* (non-orienté) est un ensemble G muni d'une relation $\sim$ symétrique et irréflexive, et que G est *connexe* si pour tous $x, y \in G$, il existe une suite finie $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec $x = x_0 \sim \dots \sim x_n = y$).
6. Les graphes non connexes, dans le même langage.

II. Plongement élémentaires

♦ **Exercice 2.**

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}$ une inclusion de $\mathcal{L}$-structures. Est-il vrai que :

1. si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$?
2. si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$ et $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$, alors $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$?
3. si $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{O}$ et $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, alors $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{O}$?

♦ **Exercice 3** (Théorème de préservation par union de chaîne).

On fixe $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{x})$ est dite $\forall\exists$ si elle est de la forme $\forall\bar{y}\exists\bar{z}\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ avec $\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ une formule sans quantificateurs. Une $\mathcal{L}$-théorie T est dite $\forall\exists$ si toutes ses formules sont $\forall\exists$. On dit qu'une $\mathcal{L}$-théorie T est *préservée par union de chaîne* si pour tout ensemble ordonné $(I,\leqslant)$ filtrant (c'est-à-dire tel que pour tous $i,j\in I$, il existe $k\in I$ tel que $i\leqslant k$ et $j\leqslant k$), pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, et pour toute famille croissante $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ de sous-structures de $\mathcal{M}$ telles que $\mathcal{M}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$, si toutes les $\mathcal{M}_i$ sont modèles de T, alors $\mathcal{M}$ l'est aussi. On veut montrer le théorème suivant : une théorie est préservée par union de chaîne si et seulement si elle est équivalente à une théorie $\forall\exists$.

1. Montrer le sens facile : si une théorie est équivalente à une théorie $\forall\exists$, alors elle est préservée par union de chaîne.

On montre maintenant l'autre sens. Soit T une théorie préservée par union de chaîne ; on notera $T_{\forall\exists}$ l'ensemble des énoncés $\forall\exists$ qui en sont conséquence. On va montrer que T est conséquence de $T_{\forall\exists}$, ce qui suffira à conclure.

2. On fixe un modèle $\mathcal{M}$ de $T_{\forall\exists}$, dont on notera $D(\mathcal{M})$ le diagramme complet. Montrer que $T\cup(D(\mathcal{M}))_{\forall}$ est consistante.
3. Montrer qu'il existe des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}'$ telles que $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}\models T$ et $\mathcal{M}\preccurlyeq\mathcal{M}'$.
4. Montrer que $\mathcal{M}\models T$ (on pourra utiliser le théorème d'union de chaîne de Tarski) et conclure.

Exercice 4 (Plongement élémentaire commun).

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{O}$ dans laquelle $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ peuvent se plonger élémentairement.

III. Élimination des quantificateurs et catégoricité

♦ **Exercice 5** (Inspiré du partiel 2015).

Soit $\mathcal{L}=\{<,\sim\}$ (les deux symboles sont des symboles de relation binaire), et T la $\mathcal{L}$-théorie qui dit que :

– $\sim$ est une relation d'équivalence ;
– Les classes de $\sim$ sont convexes pour $<$ (c'est à dire que $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x\sim z\wedge x<y<z\longrightarrow x\sim y))$;
– L'ordre $<$ induit sur chaque classe d'équivalence un ordre linéaire dense sans extrémité ;
– L'ordre $<$ introduit sur le quotient par $\sim$ un ordre linéaire dense sans extrémités.

Montrer que T est consistante, qu'elle élimine les quantificateurs, et qu'elle est ω-catégorique.

Exercice 6.

Soit K un corps. On considère le langage $\mathcal{L}=\{0,+\}\cup\{\lambda_a\mid a\in K\}$, où 0 est un symbole de constante, $+$ un symbole de fonction binaire, et pour tout $a\in K$, λ_a un symbole de fonction unaire. On munira naturellement un K-espace vectoriel $\mathcal{V}$ d'une structure de $\mathcal{L}$-structure en interprétant 0 et $+$ comme on pense, et pour tout $a\in K$, λ_a par la multiplication par le scalaire a.

1. Montrer qu'on peut axiomatiser la classe des K-espaces vectoriels infinis dans $\mathcal{L}$. Soit T la théorie ainsi obtenue.

2. Soit $\mathcal{V} \models T$. Décrire les sous-structures de $\mathcal{V}$.
3. Montrer que T élimine les quantificateurs.
4. Montrer que tout espace vectoriel admet une base.
5. Montrer que T est catégorique en tout cardinal infini $\kappa \geqslant |K|$.
6. Dans le langage $\mathcal{L}' = \{0, +, -\}$, soit T la théorie des groupe abéliens non-triviaux, sans torsion et *divisibles* (c'est à dire tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout élément x du groupe, il existe un élément y du groupe tel que $nx = y$.
   (a) Décrire tous les modèles de T, à isomorphisme près.
   (b) Montrer que T est complète et modèle-complète, mais n'élimine pas les quantificateurs.