Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 4 : Logique du permier ordre, compacité, théorie de Ramsey

20 et 23 octobre 2017

Les exercices marqués du symbole ♦ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

La question 1. de l'exercice 1 et l'exercice 3 sont à préparer avant le TD et seront corrigés tout au début de la séance.

I. Preuves formelles

♦ Exercice 1.

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux formules à une variable libre.

1. Dans la théorie formée de l'unique énoncé $\forall x\,(\varphi(x) \longrightarrow \psi(x))$, donner une preuve formelle de l'énoncé $\forall x\,\varphi(x) \longrightarrow \forall x\,\psi(x)$.
2. Montrer que les deux énoncés $\forall x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ et $\forall x\,\varphi(x) \wedge \forall x\,\psi(x)$ sont équivalents, en donnant une preuve formelle de chacun d'eux dans la théorie formée uniquement de l'autre.

♦ Exercice 2.

Soit $\mathcal{L}$ un langage. On rappelle qu'une $\mathcal{L}$-formule φ est *universelle* si elle est sans quantificateurs ou de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$, où ψ est une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs et les x_i des variables. On définit par induction sur la complexité de la formule φ une application F de l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules dans $\{0, 1\}$ telle que pour toute $\mathcal{L}$-formule φ, on ait :

- Si φ est atomique, alors $F(\varphi) = 1$.
- Si φ est de la forme $\exists x \psi$ alors :
  - si $\psi = \neg\neg \dots \neg\chi$ avec un nombre impair de $\neg$ et χ une formule universelle, on a $F(\varphi) = F(\psi)$;
  - sinon $F(\varphi) = 1$.
- Si φ est de la forme $\neg\psi$, alors $F(\varphi) = 1 - F(\psi)$;
- Si φ est de la forme $\psi \wedge \chi$, alors $F(\varphi) = 1$ ssi $F(\psi) = F(\chi) = 1$.

1. Montrer que si la $\mathcal{L}$-formule φ peut être prouvée formellement sans utiliser la règle de généralisation, alors $F(\varphi) = 1$.
2. En déduire l'existence d'une $\mathcal{L}$-formule φ universellement valide dont toute preuve formelle utilise la règle de géneralisation.

II. Compacité

♦ **Exercice 3** (Groupes totalement ordonnables).

Soit G un groupe. On dit qu'il est *totalement ordonnable* s'il existe un ordre total $<$ sur G tel que pour tous $x, y, z \in G$, si $x < y$, alors $xz < yz$ et $zx < zy$. Montrer que G est totalement ordonnable si et seulement si tous ses sous-groupes finiment engendrés le sont. (On pourra appliquer le théorème de compacité dans le langage constitué d'un symbole de relation binaire $<$ et d'un symbole de constante c_x pour chaque élément x du groupe G).

Exercice 4 (Théorème de De Bruijn - Erdös).

Une *coloration* d'un graphe $(G, \sim)$ à l'aide de κ couleurs (où κ est un cardinal) est une application $c : G \to \kappa$ telle que pour tous $x, y \in G$ avec $x \sim y$, on ait $c(x) \neq c(y)$. On dit qu'un graphe est κ-colorable s'il existe une coloration de G à l'aide de κ couleurs.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'un graphe G est k-colorable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont.

Exercice 5 (Modèles non-standards de l'arithmétique).

On considère le langage de l'arithmétique $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \times, <\}$ et la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ dont l'ensemble de base est $\mathbb{N}$ et où les symboles ont leurs interprétations usuelles (s s'interprète par la fonction successeur). On note $T = Th(\mathcal{N})$. Pour $\mathcal{M}$ un modèle de T (dont l'ensemble de base sera noté M) et $n \in \mathbb{N}$, on notera $n^{\mathcal{M}}$ l'interprétation de $s^n(0)$ dans $\mathcal{M}$. On dira qu'un élément de M est *standard* s'il est de la forme $n^{\mathcal{M}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'ensemble des éléments standards d'un modèle $\mathcal{M}$ de T forment une sous-structure de $\mathcal{M}$ isomorphe à $\mathcal{N}$.
2. Montrer que dans un modèle $\mathcal{M}$ de T, $<^{\mathcal{M}}$ définit une relation d'ordre total sur M et que l'ensemble des éléments de M qui sont standards est un segment initial de M pour cette relation d'ordre.
3. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T contenant un élément non-standard (on pourra introduire un nouveau symbole de constante destiné à être interprété par cet élément).
4. On reprend le modèle $\mathcal{M}$ de la question précédente. Soit $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}$-formule à une variable libre, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathcal{M} \models \varphi[n^{\mathcal{M}}]$. Montrer que $\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi(x)$. En déduire que l'ensemble des éléments de M qui sont standards n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.
5. Soit E l'ensemble des éléments non-standards de M. Montrer que $(E, <^{\mathcal{M}})$ est isomorphe à $X \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, pour un certain ensemble totalement ordonné $(X, <)$.

♣ **Exercice 6** (Espace des théories complètes).

Soit $\mathcal{L}$ un langage. On note $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes et déductivement closes. Pour φ un $\mathcal{L}$-énoncé, on note $\langle\varphi\rangle$ l'ensemble des $T \in \mathrm{S}(\mathcal{L})$ qui contiennent φ.

1. Montrer que les $\langle\varphi\rangle$, pour φ un $\mathcal{L}$-énoncé, forment la base d'ouverts d'une topologie sur $\mathrm{S}(\mathcal{L})$; montrer qu'ils sont également fermés pour cette topologie.
2. Montrer que $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ est séparé.

3. Pour T_0 une $\mathcal{L}$-théorie, on notera (T_0) l'ensemble des $T \in \mathrm{S}(\mathcal{L})$ tels que $T_0 \subseteq T$. Montrer qu'il s'agit d'un fermé de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$, qui est non-vide si et seulement si T_0 est consistante, et que tout fermé de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ est de cette forme (et même, que l'application qui à une $\mathcal{L}$-théorie **déductivement close** T_0 associe le fermé (T_0) de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ est une bijection).
4. Montrer que $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ est compact. (Indication : on pourra utiliser le théorème... de compacité !)
5. Montrer que les ouverts-fermés de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ sont exactement les $\langle\varphi\rangle$ pour φ un $\mathcal{L}$-énoncé.
6. Montrer que les points isolés de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ sont exactement les $\mathcal{L}$-théories finiment axiomatisables.

III. Le théorème de Ramsey fini

On rappelle que pour κ, λ, μ et ν des cardinaux, on note $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ l'énoncé « Pour tout $c : [\kappa]^\nu \longrightarrow \mu$, il existe $H \subseteq \kappa$ de cardinal λ tel que $c_{\restriction [H]^\nu}$ soit constante ». Le théorème de Ramsey infini, démontré dans le TD précédent, est l'énoncé suivant : « pour tous $d, k < \omega$, on a $\aleph_0 \to (\aleph_0)^d_k$ ».

♦ **Exercice 7** (Preuve directe du théorème de Ramsey fini)**.**

Le but de cet exercice est de donner une preuve directe du théorème de Ramsey fini [1] : pour tous $d, k, n < \omega$, il existe $N < \omega$ tel que $N \to (n)^d_k$.

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $k = 2$.

On montre maintenant le cas $k = 2$, et pour cela, on introduit une notation : pour $N, m, n, d < \omega$, on écrira $N \to (m, n)^d$ lorsque pour toute coloration $c : [N]^d \longrightarrow 2$ de $[N]^d$ à l'aide de deux couleurs, on peut trouver soit un ensemble $H \subseteq N$ de cardinal m tel que la restriction de c à $[H]^d$ soit constante de valeur 0, soit un ensemble $H \subseteq N$ de cardinal n tel que la restriction de c à $[H]^d$ soit constante de valeur 1. En particulier, l'énoncé $N \to (n, n)^d$ est précisément l'énoncé $N \to (n)^d_2$.

De plus, étant donnés $m, n, d < \omega$, s'il existe $N < \omega$ tel que $N \to (m, n)^d$, alors le plus petit N satisfaisant cette propriété sera noté $\mathrm{R}_d(m, n)$; sinon, on dira que $\mathrm{R}_d(m, n)$ est indéfini.

2. Soient $1 \leqslant m, n, d < \omega$. On suppose que $\mathrm{R}_d(m-1, n)$, $\mathrm{R}_d(m, n-1)$, et $\mathrm{R}_{d-1}(\mathrm{R}_d(m-1, n), \mathrm{R}_d(m, n-1))$ sont définis. Montrer que $\mathrm{R}_d(m, n)$ est défini et que $\mathrm{R}_d(m, n) \leqslant \mathrm{R}_{d-1}(\mathrm{R}_d(m-1, n), \mathrm{R}_d(m, n-1)) + 1$. (On pourra commencer par réfléchir au cas $d = 2$, en faisant de jolis dessins de graphes complets dont on colorera les arêtes. $d = 2$ et $m = n = 3$ est un bon cas pour commencer.)
3. En déduire que $\mathrm{R}_d(m, n)$ est défini pour tous $m, n, d < \omega$ et conclure.

♦ **Exercice 8** (Le théorème de Ramsey fini par compacité)**.**

Déduire le théorème de Ramsey fini du théorème de Ramsey infini par compacité. On pourra raisonner par contraposition : on fixera $k, d, n < \omega$ et on montrera que si pour tout $N < \omega$, on a $N \nrightarrow (n)^d_k$, alors $\aleph_0 \nrightarrow (n)^d_k$.

1. Comme vous le verrez plus tard, cette preuve est formalisable dans l'arithmétique.

IV. La compacité par le lemme de König

Le lemme de König[2] est un principe de compacité faible (plus faible que le théorème de compacité du calcul des prédicats), dont la preuve n'utilise que l'axiome de choix dénombrable, mais qui permet néanmoins d'obtenir un certain nombre de résultats intéressants. Dans cette section, on se propose de démontrer le lemme de König et de voir quelques-uns de ces résultats.

Exercice 9 (Lemme de König)**.**

Un *arbre* est un ensemble partiellement ordonné $(T, <)$ tel que pour tout $x \in T$, le segment initial $S_x = \{y \in T \mid y < x\}$ soit bien ordonné. On appelle *hauteur de* x, et on note $h(x)$, le type d'ordre de S_x. Pour α un ordinal, le $\alpha^{\text{ième}}$ niveau de T est $L_\alpha = h^{-1}(\{\alpha\})$. On dira que l'arbre T est *de hauteur* ω si pour tout ordinal α, on a $L_\alpha \neq \varnothing$ si et seulement si α est fini. Dans ce cas, une *branche infinie* de T est une sous-ensemble totalement ordonné de T qui intersecte tous ses niveaux.

1. Donner un exemple d'arbre de hauteur ω qui ne possède pas de branche infinie.
2. Soit T un arbre. Si $x \in T$, on appelle *successeur de* x tout $y \in T$ tel que $x < y$ et $h(y) = h(x) + 1$ (attention, un tel successeur n'est en général pas unique). Montrer que pour tous $x, z \in T$ avec $x < z$, il existe un successeur y de x tel que $x < y \leqslant z$.
3. Montrer le lemme de König : pour tout arbre T de hauteur ω, si pour tout $n < \omega$, le niveau L_n est fini, alors T possède une branche infinie. Vérifier qu'on a pas besoin de toute la puissance de l'axiome de choix pour cette preuve, mais que l'axiome de choix dénombrable ("Tout produit dénombrable d'ensembles non-vides est non-vide") suffit.

Exercice 10 (Le théorème de Ramsey fini par le lemme de König)**.**

Comme dans l'exercice 8, on veut montrer le théorème de Ramsey fini par compacité à partir du théorème de Ramsey infini, mais cette fois en utilisant le lemme de König. Encore une fois, on fixe $k, d, n < \omega$ et on suppose que $\forall N < \omega\ N \nrightarrow (n)^d_k$, dans le but d'en déduire que $\aleph_0 \nrightarrow (n)^d_k$. On note T l'ensemble des applications $c : [N]^d \longrightarrow k$ (pour un certain $N < \omega$ non fixé) telles que pour tout $H \subseteq N$ de cardinal n, l'application $c_{\restriction [H]^d}$ ne soit pas constante ; on ordonne T par inclusion.

1. Montrer que T est un arbre de hauteur ω dont le $N^{\text{ième}}$ niveau est exactement l'ensemble des $c \in T$ de domaine $[N]^d$.
2. Montrer que T a une branche infinie et conclure.

Exercice 11 (Le théorème de compacité du calcul propositionnel)**.**

Soit V un ensemble de symboles de variables. On appelle *formule propositionnelle* toute formule écrite (en respectant les règles qu'on s'imagine) à l'aide des variables de V et des connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$ et $\longleftrightarrow$. Une *théorie propositionnelle* est un ensemble de formules propositionnelles.

Étant donné une application $F : V \longrightarrow \{0, 1\}$ (qu'on appelle une *distribution de valeurs de vérité*, la valeur 0 correspondant à *faux* et la valeur 1 à *vrai*), on calcule comme on pense la valeur de vérité de toute formule propositionnelle. On dit que la distribution F *satisfait* une théorie T si avec cette distribution, toute formule de T a la valeur *vrai*. On dit que la théorie T est *satisfaisable* s'il existe une distribution F qui la satisfait, et *finiment satisfaisable* si toutes ses sous-théories finies sont satisfaisables.

2. Qui n'a rien à voir avec celui sur les cardinaux vu en cours

Le *théorème de compacité du calcul propositionnel* est l'énoncé qui dit qu'une théorie est satisfaisable si et seulement si elle est finiment satisfaisable. On peut simplement le voir comme conséquence du théorème de compacité du calcul des prédicats, par exemple en travaillant dans le langage $\mathcal{L}$ formé d'un symbole de prédicat unaire T et d'un symbole de constante c_v pour chaque $v \in V$, et en simulant la variable propositionnelle v par la formule atomique $\mathrm{T}(c_v)$ (qui est vouée à signifier "v est vraie"). Le but de cet exercice est de montrer le théorème de compacité du calcul propositionnel pour les théories dénombrables à l'aide du lemme de König.

On considère donc T une théorie propositionnelle dénombrable et finiment satisfaisable, que l'on écrira $T = \bigcup_{n<\omega} T_n$, où $(T_n)_{n<\omega}$ est une suite croissante de théories finies. Pour $n < \omega$, on notera V_n l'ensemble (fini) des variables apparaissant dans au moins une formule de T_n, et A_n l'ensemble des distributions partielles $F : V_n \longrightarrow \{0,1\}$ qui satisfont T_n. On notera $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$, et on munira A de l'inclusion.

1. Montrer que A est un arbre de hauteur ω dont le $n^{\text{ième}}$ niveau est A_n ;
2. Montrer que A possède une branche infinie et conclure que T est satisfaisable.
3. Vérifier que pour l'exercice 8, pour l'exercice 3 dans le cas où G est dénombrable, et pour l'exercice 4 dans le cas d'un graphe dénombrable, on aurait pu utiliser le théorème de compacité du calcul propositionnel sur une théorie dénombrable. En particulier, ces résultats sont démontrables avec seulement l'axiome de choix dénombrable.