Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

Corrigé du TD de Logique 2 : Ordinaux, Cardinaux

6 et 9 octobre 2017

Exercice 1.

1. La classe fonctionnelle $\xi \mapsto \omega^\xi$ étant strictement croissante, on a pour tout ξ que $\xi \leqslant \omega^\xi$. En particulier, $\alpha < \omega^{\alpha+1}$; on peut donc considérer γ minimal tel que $\alpha < \omega^\gamma$. Si γ était limite, on aurait $\alpha < \omega^\gamma = \sup_{\xi<\gamma} \omega^\xi$, et il existerait $\xi < \gamma$ tel que $\alpha < \omega^\xi$, contredisant ainsi la minimalité de γ. Donc $\gamma = \beta + 1$ pour un certain β, et par minimalité de γ, on a bien $\omega^\beta \leqslant \alpha < \omega^{\beta+1}$. L'unicité de β est conséquence de la croissance stricte de la fonctionnelle $\beta \mapsto \omega^\beta$.

2. *Existence.*
   On montre l'existence d'une forme normale de Cantor pour α par induction sur α. L'initialisation se fait à $\alpha = 0$, dont l'unique forme normale de Cantor est la somme vide. Fixons maintenant $\alpha > 0$. Notons α_1 l'ordinal β donné par la question 1, et écrivons la division euclidienne de α par ω^{α_1} : il existe des ordinaux k_1 et γ tels que $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \gamma$, et $\gamma < \omega^{\alpha_1}$. On a forcément $k_1 < \omega$; en effet, sinon, on aurait $\alpha \leqslant \omega^{\alpha_1}\omega = \omega^{\alpha_1+1}$, contredisant la définition de α_1. De plus, $\gamma < \alpha$. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à γ pour lui trouver une écriture sous forme normale de Cantor : $\gamma = \omega^{\alpha_2}k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n}k_n$, avec $\alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ et $k_2, \ldots, k_n < \omega$. De plus, $\omega^{\alpha_2} \leqslant \gamma < \omega^{\alpha_1}$, donc $\alpha_1 > \alpha_2$ par croissance stricte à droite de l'exponentiation. Donc $\alpha = \omega^{\alpha_1}k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n}k_n$, et ceci est bien un écriture sous forme normale de Cantor de α.

   Unicité.
   Commençons par montrer que si $\alpha = \omega^{\alpha_1}k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n}k_n$ est un ordinal écrit sous forme normale de Cantor et si $\beta > \alpha_1$, alors $\omega^\beta > \alpha$. On a en effet $\alpha \leqslant \omega^{\alpha_1}(k_1 + \ldots + k_n) < \omega^{\alpha_1}\omega = \omega\alpha_1 + 1 \leqslant \omega^\beta$.

   Montrons maintenant l'unicité de la forme normale de Cantor de α par induction sur α. Soit $\alpha = \omega^{\alpha_1}k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n}k_n$ une écriture sous forme normale de Cantor, montrons que n, les α_i et les k_i sont uniquement déterminés par α. L'inégalité démontrée au paragraphe précédent montre que $\omega^{\alpha_1} \leqslant \alpha < \omega^{\alpha_1+1}$, donc par l'unicité dans la question 1, α_1 est entièrement détermié par α. Écrivons maintenant $\gamma = \omega^{\alpha_2}k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n}k_n$. Alors par l'inégalité du paragraphe précédent, on a que $\gamma < \omega^{\alpha_1}$, et donc l'écriture $\alpha = \omega^{\alpha_1}k_1 + \gamma$ est une division euclidienne de α par ω^{α_1}. Par unicité de la division euclidienne, k_1 et γ sont entièrement déterminés par α. Maintenant, $\gamma < \alpha$, donc par hypothèse d'induction, γ admet une unique écriture sous fome normale de Cantor. Comme $\gamma = \omega^{\alpha_2}k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n}k_n$, on en déduit que n, les α_i et les k_i pour $i \leqslant 2$ sont entièrement déterminés par γ, donc par α, ce qui conclut.

3. *Ordre.*
   Soient $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$ et $\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$ deux ordinaux écrits sous forme normale de Cantor. On va montrer que $\alpha < \beta$ si et seulement si $(\alpha_1, k_1, ..., \alpha_m, k_m) <_{lex} (\beta_1, l_1, ..., \beta_n, l_n)$, où $<_{lex}$ désigne l'ordre lexicographique étendu de sorte à pouvoir comparer des uplets de longueur différente : on dira que $(x_1, ..., x_m) <_{lex} (y_1, ..., y_n)$ s'il existe $i \leqslant \min(m, n)$ avec $x_i < y_i$ et $\forall j < i \; x_j = y_j$, ou si $m < n$ et $\forall i \leqslant m \; x_i = y_i$.

Supposons d'abord $(\alpha_1, k_1, ..., \alpha_m, k_m) <_{lex} (\beta_1, l_1, ..., \beta_n, l_n)$. Si $m < n$ et si pour tout $i \leqslant m$, on a $\alpha_i = \beta_i$ et $k_i = l_i$, alors β est de la forme $\alpha+\gamma$ avec $\gamma > 0$, donc $\alpha < \beta$. Si maintenant, il existe $i \leqslant m$ tel que $\alpha_i < \beta_i$ et pour tout $j < i$, $\alpha_j = \beta_j$ et $k_j = l_j$, alors par le résultat préliminaire démontré à la question précédente, on a $\omega^{\alpha_i} \cdot k_i + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m < \omega^{\beta_i} \leqslant \omega^{\beta_i} \cdot l_i + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$; par croissance stricte à droite de la somme ordinale, on peut alors en déduire que $\alpha < \beta$. Enfin, s'il existe $i \leqslant m$ tel que $k_i < l_i$, $\alpha_i = \beta_i$ et pour tout $j < i$, $\alpha_j = \beta_j$ et $k_j = l_j$, alors en posant $\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i} \cdot k_i$, on a $\alpha = \gamma + \omega^{\alpha_{i+1}} \cdot k_{i+1} + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$ et $\beta = \gamma + \omega^{\alpha_i} \cdot (l_i - k_i) + \omega^{\beta_{i+1}} \cdot l_{i+1} + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$; or, par le cas précédent, on a $\omega^{\alpha_{i+1}} \cdot k_{i+1} + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m < \omega^{\alpha_i} \cdot (l_i - k_i) + \omega^{\beta_{i+1}} \cdot l_{i+1} + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$, donc par croissance stricte à droite de la somme, on en déduit que $\alpha < \beta$.

Réciproquement, si $\alpha < \beta$, alors on a bien $(k_1, ..., k_n) <_{lex} (l_1, ..., l_n)$, car sinon on aurait $(l_1, ..., l_n) \leqslant_{lex} (k_1, ..., k_n)$, ce qui montrerait que $\beta \leqslant \alpha$ par le sens précédent.

Addition.

Soient $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$, et $\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$ deux ordinaux écrits sous forme normale de Cantor. Si $\alpha_m < \beta_1$, alors en notant γ l'ordinal non-nul tel que $\alpha_m + \gamma = \beta_1$, on a $\omega^{\alpha_m} \cdot k_m + \omega^{\beta_1} \cdot l_1 = \omega^{\alpha_m} \cdot (k_m + \omega^{\gamma} \cdot l_1) = \omega^{\alpha_m} \cdot \omega^{\gamma} \cdot l_1) = \omega^{\beta_1} \cdot l_1$, donc $(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m) = (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot k_{m-1}) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m)$. Et si $\alpha_m = \beta_1$ alors $(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m) = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m}(k_m + l_1) + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$. Une récurrence immédiate utilisant cette remarque montre que :

- si $\alpha_1 < \beta_1$ alors $\alpha + \beta = \beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$;
- s'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\alpha_i = \beta_1$, alors $\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i}(k_i + l_1) + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$;
- sinon, en prenant $i \in [\![1, m]\!]$ maximal tel que $\alpha_i > \beta_1$, alors on a $\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i} \cdot k_i + \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$.

Dans les trois cas, il s'agit bien d'une écriture sous forme normale de Cantor.

Exercice 2.

1. $G_2(5) = 5 = 2^2 + 1$;

   $G_3(5) = 3^3 = 27$;

   $G_4(5) = 4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 255$;

   $G_5(5) = 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 467$;

   $G_6(5) = 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 = 775$.

   Comme vous pouvez le constater, ça croît très vite... Internet m'informe qu'il faut attendre environ le $A(5,4)^{\text{ième}}$ terme (où A désigne la fonction d'Ackermann) pour que la suite atteigne enfin 0.

2. Si on écrit l'entier a en base p itérée et qu'on remplace tous les p par des q, puisque $p < q$, tous les coefficients et exposants mis en jeu dans l'écriture obtenue sont bien strictement inférieurs à q, donc il s'agit d'une écriture de $f_{p,q}(a)$ en base q itérée. Il suffit alors de remplacer de nouveau tous les q par des r dans cette écriture pour obtenir $f_{q,r} \circ f_{p,q}(a)$; mais on aurait obtenu le même résultat en remplaçant directement tous les p par des r au départ, ce qui montre que $f_{p,r}(a) = f_{q,r} \circ f_{p,q}(a)$ comme voulu.

3. On montre par récurrence sur $n < \omega$ que $f_{p,q}{}_{\restriction n}$ est strictement croissante. Le résultat est vrai au rang $n = 0$; supposons le vrai au rang n et montrons-le au rang $n + 1$. Il faut montrer que si $0 \leqslant a < b \leqslant n$, alors $f_{p,\omega}(a) < f_{p,\omega}(b)$. Ceci étant clair lorsque $a = 0$, on supposera $a \geqslant 1$. Écrivons $a = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + a_0$ et $b = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + b_0$, avec $k \in \mathbb{N}$, $\forall i \leqslant k$ $(a_i < p \wedge b_i < p)$, et $b_k \neq 0$. On a donc $f_{p,\omega}(a) = \omega^{f_{p,\omega}(k)} a_k + \omega^{f_{p,\omega}(k-1)} a_{k-1} + \ldots + a_0$ et

$f_{p,\omega}(b) = \omega^{f_{p,\omega}(k)} b_k + \omega^{f_{p,\omega}(k-1)} b_{k-1} + \ldots + b_0$. Mais remarquons que $k < p^k \leqslant b \leqslant n$, donc par hypothèse de récurrence, on a $f_{p,\omega}(k) > f_{p,\omega}(k-1) > \ldots > 0$; les deux écritures précédentes sont donc des formes normales de Cantor. Et comme $a < b$, on a $(a_k, \ldots, a_0) <_{lex} (b_k, \ldots, b_0)$, donc $f_{p,\omega}(a) < f_{p,\omega}(b)$ par la question 3 de l'exercice précédent.

4. On montre que si la suite $(g_p(a))_{p \geqslant 2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle d'entiers $[\![2, n]\!]$, alors la suite $(f_{p,\omega}(g_p(a)))_{p \geqslant 2}$ est strictement décroissante sur $[\![2, n+1]\!]$. On a en effet, pour $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$\begin{array}{rcl} f_{p+1,\omega}(g_{p+1}(a)) & = & f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a)) - 1) \\ & < & f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a))) \\ & = & f_{p,\omega}(g_p(a)), \end{array}$$

l'égalité étant conséquence de la stricte décroissance de $f_{p+1,\omega}$ démontrée à la question précédente, et la dernière égalité étant conséquence de la question 2.

5. Si la suite $(G_p(a)_{p \geqslant 2}$ ne s'annulait pas, alors par la question précédente, la suite $(f_{p,\omega}(g_p(a)))_{p \geqslant 2}$ serait une suite infinie strictement décroissante d'ordinaux, ce qui est impossible.

Exercice 3.

1.
   - $2^\omega = \sup_{n<\omega} 2^n = \omega$.
   - $(\omega+1)^2 = (\omega+1)(\omega+1) = (\omega+1)\omega + \omega + 1$; or $\omega^2 \leqslant (\omega+1)\omega \leqslant (\omega \cdot 2)\omega = \omega \cdot (2\omega) = \omega^2$ (en effet, $2\omega = \sup_{n<\omega} 2n = \omega$) ; donc $(\omega+1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$.
   - $\omega^\omega \leqslant (\omega+1)^\omega \leqslant (\omega \cdot 2)^\omega$. Or, pour $1 \leqslant n < \omega$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\omega \cdot 2)^n & = & \omega \cdot \underbrace{(2\omega) \cdot \ldots \cdot (2\omega)}_{n-1 \text{ fois}} \cdot 2 \\ & = & \omega \cdot \underbrace{\omega \cdot \ldots \cdot \omega}_{n-1 \text{ fois}} \cdot 2 \\ & = & \omega^n \cdot 2, \end{array}$$

   donc $\omega^n \leqslant (\omega \cdot 2)^n \leqslant \omega^{n+1}$, et $(\omega \cdot 2)^\omega = \sup_{n<\omega} (\omega \cdot 2)^n = \omega^\omega$. Finalement, on a $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$.

2. Supposons qu'un tel α existe et écrivons sa division euclidienne par ω : $\alpha = \omega \cdot \beta + n$, avec $n < \omega$. Alors $\omega^2 = \omega \cdot \beta + n + \omega = \omega \cdot (\beta + 1)$, donc $\beta + 1 = \omega$, contradiction.

Exercice 4.

1. (a) Prendre $\alpha = \omega$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$. On a $(\omega+1) \cdot 2 = \omega + 1 + \omega + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \cdot 2 + 1$, alors que $\omega \cdot 2 + 1 \cdot 2 = \omega \cdot 2 + 1$.

   (b) Prendre $\alpha = \beta = 2$ et $\gamma = \omega$. On a $(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega$ (la preuve est la même qu'à la question 1 de l'exercice 3), et $2^\omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$.

2. (a) Prendre $\alpha = 2$ et $\lambda = \omega$. On a $\sup_{n<\omega} n \cdot 2 = \omega \neq \omega \cdot 2$.

   (b) Prendre $\alpha = 2$ et $\lambda = \omega$. On a $\sup_{n<\omega} n^2 = \omega \neq \omega^2$.

Exercice 5.

On notera $[\kappa]^{\leqslant\lambda}$ l'ensemble des parties de κ de cardinalité $\leqslant \lambda$, et ${}^{\lambda}\kappa$ l'ensemble des applications de λ dans κ (pour ne pas le confondre avec κ^{λ}, qui est son cardinal).

On a une surjection $\begin{array}{ccc} {}^{\lambda}\kappa & \longrightarrow & [\kappa]^{\leqslant\lambda} \\ f & \longmapsto & \operatorname{Im} f \end{array}$, donc $|[\kappa]^{\leqslant\lambda}| \leqslant \kappa^{\lambda}$.

Réciproquement, une application étant uniquement déterminée par son graphe, on a une injection :

$$\begin{array}{ccc} {}^{\lambda}\kappa & \longrightarrow & [\lambda \times \kappa]^{\leqslant\lambda} \\ f & \longmapsto & \{(\alpha, f(\alpha)) \mid \alpha < \lambda\} \end{array},$$

donc $\kappa^{\lambda} \leqslant |[\lambda \times \kappa]^{\leqslant\lambda}|$ (ici, $\lambda \times \kappa$ désigne le produit cartésien ensembliste, et on notera le produit cardinal sans symbole). Or, $\lambda\kappa = \max(\lambda, \kappa) = \kappa$, donc il existe une bijection entre $\lambda \times \kappa$ et κ ; et cette bijection induit une bijection entre $[\lambda \times \kappa]^{\leqslant\lambda}$ et $[\kappa]^{\leqslant\lambda}$. On a donc $|[\lambda \times \kappa]^{\leqslant\lambda}| = |[\kappa]^{\leqslant\lambda}|$, ce qui permet de conclure que $|[\kappa]^{\leqslant\lambda}| = \kappa^{\lambda}$.

Exercice 6.

Notons $X = \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$. Pour tout $\xi < \alpha$, posons $Y_\xi = X_\xi \setminus \left(\bigcup_{\zeta<\xi} X_\zeta\right)$, de sorte que $X = \bigsqcup_{\xi<\alpha} Y_\xi$ et pour tout $\xi < \alpha$, $X_\xi = \bigsqcup_{\zeta\leqslant\xi} Y_\zeta$ (le symbole $\sqcup$ désigne l'union disjointe). Pour tout $\xi < \alpha$, le théorème de Zermelo nous permet de munir Y_ξ d'un bon ordre que l'on notera $<_\xi$. On peut alors définir une relation $<$ sur X par, pour tous $x \in Y_\xi$ et $y \in Y_\zeta$, $x < y \Leftrightarrow \xi < \zeta \vee (\xi = \zeta \wedge x <_\xi y)$. On vérifie que cette relation est un bon ordre sur X dont tous les X_ξ sont des segments initiaux. Soit $\varphi : X \longrightarrow \beta$ l'unique isomorphisme de X muni de cet ordre sur un ordinal. Pour tout $\xi < \alpha$, $\varphi''(X_\xi)$ est un segment initial de β ; c'est un ordinal que l'on notera β_ξ. On a de plus $|\beta_\xi| = |X_\xi| < \kappa$, donc $\beta_\xi < \kappa$. Or, $X = \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$ donc $\beta = \bigcup_{\xi<\alpha} \beta_\xi = \sup_{\xi<\alpha} \beta_\xi$. Ceci montre que $\beta \leqslant \kappa$, et donc que $|X| \leqslant \kappa$.

Exercice 7.

1. Supposons (ACD). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ensembles non-vides. On pose $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times X_n$, et $\mathcal{R} = \{(m, x, n, y) \in X \times X \mid n = m + 1\}$. (ACD) nous donne $(n_i, x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $n_0 = 0$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(n_i, x_i, n_{i+1}, x_{i+1}) \in \mathcal{R}$; une récurrence immédiate montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $n_i = i$, et donc que $x_i \in X_i$. La suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est donc un élément du produit $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, qui est donc non-vide.

2. Supposons (AC). Soit X un ensemble. Alors le produit $\displaystyle\prod_{x\in\mathcal{P}(X)\setminus\varnothing} x$ est non-vide ; un élément de ce produit est une fonction de choix pour X.

   Réciproquement, supposons que tout ensemble admette une fonction de choix. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non-vides. On pose $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Soit f une fonction de choix pour X. Alors la famille $(f(X_i))_{i\in I}$ est un élément du produit $\prod_{i\in I} X_i$.

3. Supposons (AC). Soit $g : X \longrightarrow Y$ une surjection entre deux ensembles. Soit f une fonction de choix pour X. Alors la fonction $h : Y \longrightarrow X$ définie par, pour tout $y \in Y$, $h(y) = f(g^{-1}(\{y\})$ est une section de g.

   Supposons maintenant que toute surjection admet une section. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non-vides. On pose $X = \bigcup_{i\in I} \{i\} \times X_n$, et on note $p : X \longrightarrow I$ la première projection (i.e. la fonction qui à un élément de X associe sa première coordonnée). Comme les X_i sont non-vides, p est une surjection ; soit $h : I \longrightarrow X$ une section de p. Pour tout $i \in I$, on note x_i la deuxième coordonnée de $h(i)$; alors $(x_i)_{i\in I}$ est un élément du produit $\prod_{i\in I} X_i$.

4. Supposons (AC). Soient X un ensemble et $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ telle que pour tout $x \in X$, l'ensemble $X_x = \{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ soit non-vide. Soit f une fonction de choix sur X. Soit $x \in X$. On définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur n en posant $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(X_{x_n})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$, ce qui montre (ACD).

5. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. On fixe $f : I \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection ; pour tout $i \in I$, on note $\mathcal{B}_i$ l'ensemble des bijections de X_i dans $\mathbb{N}$, non-vide par hypothèse. Par (ACDen), le produit $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est non-vide ; soit $(g_i)_{i \in I}$ un élément de ce produit. On notera également, pour $x \in X$, $h(x)$ le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_{f^{-1}(n)}$. Alors on vérifie facilement que la fonction $F : X \longrightarrow \mathbb{N}^2$ définie par, pour tout $x \in X$, $F(x) = (h(x), g_{f^{-1}(h(x))}(x))$, est injective ; X est donc subpotent à $\mathbb{N}^2$, qui est dénombrable, donc est au plus dénombrable. D'autre part, X contient les X_i qui sont dénombrables, donc X est dénombrable.