Noé de Rancourt
Bureau T9A, toits du DMA

noe.de.rancourt@ens.fr
http://webusers.imj-prg.fr/~noe.de-rancourt/

TD de Logique 2 : Ordinaux, Cardinaux

6 et 9 octobre 2017

Les exercices marqués du symbole ⧫ sont importants, ce sont ceux que je prévois d'aborder en TD (je ne garantis pas qu'on aura le temps de tous les faire). Ceux d'entre eux qu'on aura eu le temps d'aborder sont à connaître. Les exercices sans symbole sont moins importants, on les abordera en TD si le temps le permet, et sinon je vous conseille de les faire chez vous pour approfondir. Les exercices marqués du symbole ♣ sont facultatifs, en général plus difficiles, et sont destinés à vous faire découvrir des notions en marge du cours ou des applications des notions vues en cours. N'hésitez pas à me demander des précisions à leur propos si ça vous intéresse.

L'exercice 5 est à préparer avant le TD et sera corrigé tout au début de la séance.

I. Ordinaux

⧫ **Exercice 1** (Forme normale de Cantor)**.**

On appelle forme normale de Cantor d'un ordinal α toute écriture de la forme :

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \ldots + \omega^{\alpha_n} k_n$$

avec $n < \omega$, $k_1, \ldots, k_n \in \omega \backslash \{0\}$ et $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$ des ordinaux.

1. Montrer que si α est un ordinal non nul, il existe un unique ordinal β tel que $\omega^\beta \leqslant \alpha < \omega^{\beta+1}$.
2. Montrer que tout ordinal admet une unique forme normale de Cantor.
3. Décrire l'ordre et l'addition pour des ordinaux en forme normale de Cantor.

⧫ **Exercice 2** (Théorème de Goodstein)**.**

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. On définit l'écriture de a en base p-itérée de la manière suivante : on écrit d'abord a en base p, sous la forme $a = a_k p^k + \ldots + a_1 p + a_0$; puis on réitère le procédé sur les exposants, et ainsi de suite, de sorte à n'avoir plus que des nombres inférieurs à p à la fin. Par exemple, en base 2 itérée, 35 s'écrira $2^{2^2+1} + 2 + 1$ et 88 s'écrira $3^{3+1} + 2 \cdot 3 + 1$.

Pour $q \geqslant p \geqslant 2$, on définit la fonction $f_{p,q}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante : pour a un entier, on écrit a en base p itérée et on remplace dans cette écriture tous les p par des q. Le nombre ainsi formé est $f_{p,q}(a)$. On définit de la même manière les fonctions $f_{p,\omega}$ en remplaçant p par ω (on commencera alors l'écriture par les termes avec les plus grands exposants et on écrira les coefficients à droite des ω^α). Par exemple, $f_{3,4}(88) = 4^{4+1} + 2 \cdot 4 + 1 = 1033$, et $f_{3,\omega}(88) = \omega^{\omega+1} + \omega \cdot 2 + 1$.

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on appelle *suite de Goodstein* de a la suite $(g_n(a))_{n \geqslant 2}$ définie par :

$$g_2(a) = a \quad \text{et} \quad g_{n+1}(a) = \begin{cases} f_{n,n+1}(g_n(a)) - 1 & \text{si } g_n(a) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Goodstein : pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite de Goodstein de a stationne à 0 à partir d'un certain rang. Ce résultat n'a évidemment pas d'intéret en soi, mais est connu pour être historiquement le premier énoncé « concret » vrai en théorie des ensembles mais indécidable en arithmétique (l'énoncé construit par Gödel dans ce but n'avait aucun sens mathématique).

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite de Goodstein pour 5.
2. Montrer que pour tous $\omega \geqslant r > q > p \geqslant 2$, on a $f_{q,r} \circ f_{p,q} = f_{p,r}$.
3. Montrer que les fonctions $f_{p,\omega}$ sont strictement croissantes.
4. Soit $a \in \mathbb{N}$. Étudier la monotonie de la suite des $f_{p,\omega}(g_p(a))$.
5. Conclure que pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite de Goodstein pour a est nulle à partir d'un certain rang.

Exercice 3 (Encore des opérations)**.**

1. Calculer 2^ω, $(\omega+1)^2$, $(\omega+1)^\omega$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'ordinal α tel que $\alpha + \omega = \omega^2$.

Exercice 4 (Contre-exemples)**.**

1. Trouver des ordinaux α, β et γ tels que :
   (a) $(\alpha+\beta)\gamma \neq \alpha\gamma + \beta\gamma$;
   (b) $(\alpha\beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma\beta^\gamma$.
2. Trouver un ordinal α et un ordinal limite λ tels que :
   (a) $\lambda\alpha \neq \sup_{\xi<\lambda} \xi\alpha$;
   (b) $\lambda^\alpha \neq \sup_{\xi<\lambda} \xi^\alpha$.

II. Cardinaux

♦ Exercice 5.

Soient κ et λ deux cardinaux infinis avec $\lambda \leqslant \kappa$. Montrer que l'ensemble des parties de κ de cardinalité $\leqslant \lambda$ a pour cardinalité κ^λ.

Exercice 6.

Soit κ un cardinal. Soit $(X_\xi)_{\xi<\alpha}$ une suite d'ensembles de cardinal $< \kappa$, indexée par un ordinal α, et croissante pour l'inclusion. Montrer que $\left|\left(\bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi\right)\right| \leqslant \kappa$.

III. Axiome(s) de choix et conséquences

Dans les deux exercices qui suivent, exceptionnellement*, on ne supposera pas l'axiome de choix, sauf mention contraire.*

Exercice 7.

On considère les trois énoncés suivants :

(AC) : Tout produit d'ensembles non vides est non vide.

(ACD) : Si X est un ensemble et $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ une relation binaire telle que, pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ avec $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$.

(ACden) : Tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

(AC) est appelé *axiome du choix*, (ACD) est appelé *axiome des choix dépendants* et (ACden) est appelé *axiome du choix dénombrable*.

1. Montrer que (ACD) implique (ACden).
2. Une fonction de choix pour un ensemble X est une fonction $f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\} \to X$ telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$, $f(x) \in x$. Montrer que (AC) est équivalent à l'assertion que tout ensemble admet une fonction de choix.
3. Montrer que (AC) est équivalent au fait que toute surjection admet une section, i.e. pour toute surjection $g : X \to Y$ il existe $h : Y \to X$ telle que $g \circ h$ est l'identité sur Y.
4. Montrer que (AC) implique (ACD).
5. On suppose (ACDen). Montrer que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

♣ **Exercice 8** (Finitude de Dedekind)**.**

1. Soit X un ensemble, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) X contient un sous-ensemble dénombrable.
   (b) Pour tout ensemble Y au plus dénombrable, $X \cup Y$ est équipotent à X.
   (c) X est en bijection avec une partie propre de X.

   On dira qu'un ensemble est *fini* s'il est équipotent à un intervalle d'entiers de la forme $[\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}$, *infini* s'il n'est pas fini, *D-infini* s'il satisfait les propriétés équivalentes de la question 1, et *D-fini* s'il n'est pas D-infini.
2. Montrer que tout ensemble fini est D-fini.
3. Montrer que l'union et le produit de deux ensembles D-finis sont D-finis.
4. Montrer que la réunion disjointe d'une famille D-finie d'ensemble D-finis est D-finie.
5. Montrer pour tout ensemble infini X, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ est D-infini.
6. Montrer, en utilisant (ACden) que pour tout ensemble X, $\mathbb{N}$ est subpotent à X si et seulement si tout ensemble fini est subpotent à X.
7. En déduire que si on admet (ACden), un ensemble est infini si et seulement si il est D-infini.