

CVIČENÍ IV

TEORIE

Lineární optimalizace je částí teorie optimalizace, která se zabývá řešením optimalizačních úloh, jejichž vstupní data — **omezení** a **účelová funkce** — jsou dána pomocí lineárních funkcí. Obecný tvar úlohy lineární optimalizace je dán jako

$$\begin{aligned} \min c^T x, \\ \text{s.t. } Ax \leq b, \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

kde x představuje vektor rozhodovacích proměnných (kolik materiálu použít na výrobu kterého produktu, jaký podíl majetku mít uložen v investicích do konkrétního aktiva apod.), matice A definuje vztah mezi rozhodovacími proměnnými a omezeními problému, vektor b určuje „hladinu“ omezení a vektor c zase definuje, jakým způsobem je rozhodnutí x odměněno nebo penalizováno. Typickým — a jak si později procvičíme, nijak omezujícím — předpokladem je, že vektor x je nezáporný.

Množina přípustných řešení je v lineárním programování vždy¹ konvexní — jedná se totiž o konvexní polyedrickou množinu. Geometricky jde o zobecnění mnohoúhelníku ve vyšší dimenzi. Klíčovou vlastností lineárního programování je, že pokud úloha má řešení, pak alespoň jedno z nich leží ve „vrcholu“ tohoto mnohoúhelníku. Formálně definujeme:

Definice 1. Definujeme **krajní bod** množiny A jako $a \in A$, pro který platí, že neexistují $x, y \in A$, $x \neq y$ a $\lambda \in (0, 1)$ tak, že $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Množinu krajních bodů označíme jako $\text{ext}(A)$.

Definice 2. **Krajní směr** množiny A je nenulový vektor d , jenž splňuje $a + \alpha d \in A$ pro každé $a \in A$ a $\alpha \geq 0$. Množinu krajních směrů označíme jako $\text{extd}(A)$.

FORMULACE

Formulujte úlohu L_1 (mediánové) regrese jako úlohu lineární optimalizace.

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |y_i - a - bx_i|.$$

Nápověda: Do úlohy můžeme přidat nové pomocné proměnné. Zamyslete se, jak byste zapsali absolutní hodnotu pomocí maxima.

¹Jak se říká, „každé pravidlo má svou výjimku“, a není tomu jinak ani v tomto případě. Lineární programy ztrácejí konvexitu, když některá z rozhodovacích proměnných je celočíselná. Slavným příkladem, kdy k tomu dochází, je tzv. „problém batohu“, při kterém chceme vybrat podmnožinu předmětů, které Indiana Jones vměstná do svého batohu při útěku z rozpadajícího se chrámu zapomenuté civilizace.

PŘÍKLADY

Příklad 1. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} & \min 3x_1 - x_2 \\ & \text{za podmíněk } 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & \quad -4x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 2. Řešte předchozí příklad s maximalizací místo minimalizace.

Příklad 3. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} & \min 2x_1 + 2x_2 \\ & \text{za podmíněk } x_1 - x_2 \leq 5 \\ & \quad x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ & \quad -x_1 \leq 1 \\ & \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 4. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + 4x_2 \\ & \text{za podmíněk } x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \quad -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \quad x_1 \geq 0 \\ & \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 5. Řešte předchozí příklad s minimalizací místo maximalizace.

Příklad 6. V předchozím příkladě maximalizujte funkci $x_1 + x_2$.