

Cvičení III

TEORIE

Definice 1. Necht' $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je konvexní na D , pokud $\forall x, y \in D$ a $\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Definice 2. Necht' $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Pokud existují a jsou konečné druhé smíšené parciální derivace funkce f (značíme jako $f \in \mathcal{C}^2(D)$), definujeme Hessovu matici jako

$$H_f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right)_{i,j}^{n,n}.$$

Definice 3. Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se nazývá pozitivně semidefinitní (znač. $A \succeq 0$), pokud $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$.

Tvrzení 1. Pokud $f \in \mathcal{C}^2(D)$, matice $H_f(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní na $\text{int}(D)$ právě tehdy, když f je konvexní na $\text{int}(D)$.

Tvrzení 2. Necht' A je čtvercová matice. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je pozitivně semidefinitní,
2. všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná,
3. všechny hlavní minory matice A mají nezáporný determinant.

Definice 4. Epigraf funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je množina $\text{epi}(f) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \leq t\}$.

FORMULACE

Tenis Předpokládejme, že při hře tenisu má každý z hráčů dvě strategie: zahrát míč na pravou nebo levou stranu kurtu (předpokládejme, že strany kurtu mají jasnou orientaci shodnou pro oba hráče). Když první hráč hraje zleva doprava, získá bod s pravděpodobností p_{LL} ; když hraje na pravou stranu kurtu, získá bod s pravděpodobností p_{LR} , a podobně při podávání z pravé strany kurtu jsou jeho pravděpodobnosti pro získání bodu dány jako p_{RL} a p_{RR} . Označme pravděpodobnosti zisku bodu druhého hráče jako q_{LL}, q_{LR}, q_{RL} a q_{RR} .

Formulujte rozhodovací proces obou hráčů pomocí optimalizační úlohy. Co bude optimální hodnota této úlohy představovat? Jaký je vztah mezi těmito dvěma úlohami?

Nápověda: Oba hráči chtějí maximalizovat svou pravděpodobnost zisku bodu při pro ně nejhorší možné strategii soupeře.

PŘÍKLADY

Příklad 1. Necht' epigraf funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní množina. Ukažte, že f je konvexní funkce.

Příklad 2. Dokažte následující vlastnosti.

1. Pokud $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ jsou konvexní, pak $\alpha f + \beta g$ je konvexní pro $\alpha, \beta \geq 0$.
2. Pokud $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ jsou konvexní funkce, pak $\sup_{i \in I} f_i$ je konvexní funkce.
3. Necht' $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní neklesající a $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní, pak $h \circ g$ je konvexní.

Příklad 3. Rozhodněte o definitnosti matice:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} = a I_n + b \mathbb{I}_{n \times n} - b I_n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Příklad 4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

- (a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|$,
- (b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0$,
- (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$,
- (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,
- (e) $f(x, y) = xy \log(xy), x, y > 0$.

Příklad 5. Rozhodněte, která z následujících množin je konvexní:

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x + e^y \leq 10\}$
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, e^x + e^y \leq 10\}$

Příklad 6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny a funkce konvexní, a svá tvrzení dokažte. V případě, že množina konvexní není, najděte trojici bodů, která porušuje definici konvexity.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq (y - 1)^2, x + 2y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0\}$
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + 3y^2 - 6y \leq 10, |x| + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (e^x + y^3) \log(e^x + y^3) \leq 15, x \leq 2\}$
- d) $f(x, y) = \exp(x^2 + e^{-y}) + 6xy$ na $(1, \infty) \times (0, \infty)$
- e) $f(x, y) = \log \left(\frac{e^{x+ay}}{1 + e^{x+ay}} \right)$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.