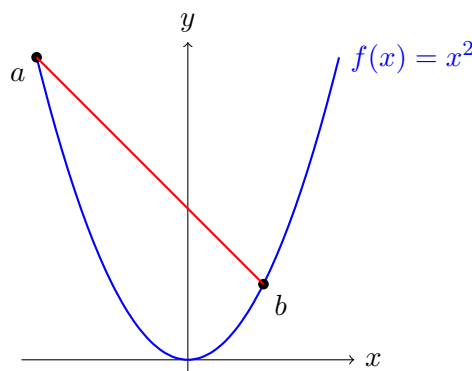
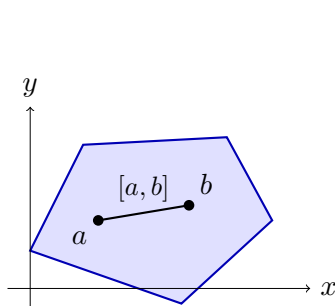


## CVIČENÍ II

## TEORIE

**Definice 1.** Řekneme, že množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je *konvexní*, pokud  $\forall x, y \in X$  platí  $\forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in X$ .

**Definice 2.** Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  je konvexní a  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  je *konvexní* na  $D$ , pokud  $\forall x, y \in D$  a  $\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .



Konvexita je jednou ze základních analytických vlastností funkcí. V optimalizaci má klíčovou roli jak pro teoretické vlastnosti řešení, tak pro výpočetní algoritmy. Konvexita množiny nám totiž umožňuje při výpočtu optimální hodnoty spoléhat na fakt, že krokem ve směru „do středu“ množiny přípustných řešení z ní nemůžeme vyjít ven. Tím je zaručeno, že uvnitř množiny přípustných řešení se nenacházejí žádné „pasti“, tedy pokud algoritmus například sleduje cestu největšího poklesu uvnitř množiny, nehrozí, že by došel do oblasti nepřipustnosti. Speciálními typy konvexních množin jsou konvexní kužely a konvexní polyedrické množiny.

**Definice 3.** Řekneme, že  $A$  je *konvexní polyedrická množina*, je-li průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq c\}$ . *Konvexní polyedr* je omezená konvexní polyedrická množina.

**Definice 4.** Množina  $K$  se nazývá *kužel*, pokud platí  $0 \in K$  a  $\forall \alpha > 0 : K = \alpha K$ . *Konvexní kužel* je konvexní množina, která je zároveň kužel.

## FORMULACE

**Úloha konvexní optimalizace (Markowitzův model portfolio)** Máme k dispozici  $n$  rizikových aktiv  $R_1, \dots, R_n$  s očekávanými výnosy  $\mu_1, \dots, \mu_n$  a kovarianční maticí  $\Sigma \succeq 0$ . (Platí, že  $\Sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$ , kde  $\rho_{i,j}$  je korelace mezi  $R_i$  a  $R_j$  a  $\sigma_i, \sigma_j$  jsou směrodatné odchylky výnosů  $R_i$  a  $R_j$ .)

Pro dané portfolio  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  s  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  je očekávaný výnos  $\mu(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$  a riziko  $\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\langle \Sigma \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j}$ .

Formulujte optimalizační úlohu ve tvaru úlohy konvexní optimalizace v podobě:

- Minimalizace rizika portfolio za podmínky minimálního očekávaného výnosu  $\mu^*$ .
- Maximalizace očekávaného výnosu portfolio za podmínky maximálního rizika portfolio  $\sigma^*$ .
- Maximalizace rizikově korigovaného výnosu s vahou  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## PŘÍKLADY

**Příklad 1.** Bud'  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  konvexní. Rozhodněte, zda následující množiny musí, nebo nemusí být konvexní.

- (a)  $A \cup B$
- (b)  $A \cap B$
- (c)  $A \setminus B$
- (d)  $A^C$
- (e)  $\text{clo}(A)$

**Příklad 2.** Podobně jako v předchozím příkladu:

- (a)  $\text{int}(A)$
- (b)  $\alpha A, \alpha \in \mathbb{R}$
- (c) Minkowského součet  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{a \in A} (a + B)$
- (d) Minkowského rozdíl  $A \ominus B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$
- (e)  $A \times B$

**Příklad 3.** Necht'  $A$  má vlastnost, že  $\forall x, y \in A$  platí také  $x/2 + y/2 \in A$ .

- (a) Je  $A$  konvexní?
- (b) Je  $A$  konvexní, pokud víme, že  $A$  je uzavřená?
- (c) Je  $A$  konvexní, pokud víme, že  $A$  je otevřená?

**Příklad 4.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}^n$  je uzavřená a konvexní množina, která obsahuje přímku  $p$ . Ukažte, že pro  $b \in M$  a  $b \notin p$  množina  $M$  obsahuje přímku rovnoběžnou s  $p$  procházející bodem  $b$ .

**Příklad 5.** Necht'  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní funkce. Která z následujících tvrzení platí?

- (a) Dolní úrovně množina funkce  $g$  definovaná jako  $L_g^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq \alpha\}$  je konvexní.
- (b) Horní úrovně množina funkce  $g$  definovaná jako  $S_g^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \geq \alpha\}$  je konvexní.
- (c) Epigraf funkce  $g$ ,  $\text{epi}(g) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(x) \leq t\}$ , je konvexní.
- (d) Graf funkce  $g$ ,  $\text{grph}(g) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(x) = t\}$ , je konvexní.

**Příklad 6.** Rozhodněte, jakého typu jsou následující množiny:

- (a)

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x + y &\leq 4 \end{aligned}$$

**Příklad 7.** Ověřte, že množina  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$  je konvexní kužel.

**Příklad 8.** Rozhodněte o množinách:

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ,
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ ,
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$ ,

která z nich je konvexní polyedr a která není.