

CVIČENÍ I

TEORIE

OPTIMALIZAČNÍ PROBLÉM. Máme danou množinu rozhodnutí (strategií, variant, plánů...) označme ji X , a zároveň známe oceňovací funkci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, která každému rozhodnutí $x \in X$ přiřadí hodnotu $f(x)$. Naším cílem je optimalizovat – maximalizovat nebo minimalizovat – hodnotu f na množině X .

Pozorování: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že naším cílem je minimalizovat funkční hodnoty f . Pokud by totiž f představovala zisk, můžeme definovat ztrátu $l = -f$, nebo někdy také tzv. „žal“ $r = (\sup f) - f$, a minimalizovat novou upravenou hodnotu.

Formulaci úlohy optimalizace myslíme zápis

$$\begin{aligned} \min f(x), \\ \text{s.t. } x \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

TERMINOLOGIE.

- (a) Množinu X nazýváme množinou přípustných řešení.
- (b) Funkci f nazýváme účelovou funkcí.
- (c) Rozhodnutí $x^* \in X : f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$ nazýváme optimálním řešením úlohy (1).

Pozorování Typicky $X \simeq S \subseteq \mathbb{R}^n$ a množinu S můžeme vyjádřit pomocí kombinace rovností a nerovností, které musí vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňovat, aby byl přípustným řešením pro úlohu (1). Označme $I^=$ množinu indexů omezení tvaru rovností a $I^{\leq}$ množinu indexů omezení tvaru nerovností, přičemž funkce, které vyjadřují rovnosti, označme $h_j, j \in I^=$ a funkce nerovností $g_i, i \in I^{\leq}$. Úlohu (1) pak můžeme zapsat přesněji jako

$$\min f(\mathbf{x}), \tag{2}$$

$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I^{\leq}, \tag{3}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in I^=, \tag{4}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Z klasické analýzy (kalkulu) víme, že v případě, kdy $f \in C^2(a, b)$ a chceme najít její minimum x^* na intervalu $[a, b]$, pak platí

$$x^* \in \arg \min_{x \in [a, b]} f(x) \iff (f'(x^*) = 0 \wedge f''(x^*) \geq 0) \text{ nebo } x^* \in \{a, b\}, f(x^*) \leq f(x), \forall x \in [a, b].$$

Tudíž buď funkce splňuje tzv. podmínku druhého řádu, nebo je optimum dosaženo v krajním bodě množiny přípustných řešení. Naším cílem v tomto předmětu bude zavést podobná kritéria a algoritmy výpočtu pro optimální hodnoty (2), a to zejména pro problémy, kdy funkce f, g_i, h_j jsou lineární (afinní) nebo konvexní.

FORMULACE

Formulace 1. (Výrobní plánování) Podnik vyrábí 3 druhy výrobků V_1, V_2, V_3 . Při výrobě se spotřebovávají suroviny S_1 a S_2 a strojový čas Z_1 . Na výrobu 1 kg výrobku V_1 se spotřebují 2 kg suroviny S_1 a 6 kg suroviny S_2 , doba výroby je 13 hodin. K výrobě 1 kg výrobku V_2 je třeba 3 kg suroviny S_1 a 8 kg suroviny S_2 , doba výroby je 17 hodin. Výroba 1 kg výrobku V_3 trvá 15 hodin a spotřebuje 5 kg suroviny S_1 a 1 kg suroviny S_2 . Na 1 rok máme k dispozici 200 kg S_1 , 150 kg S_2 a 1800 hodin na zařízení Z_1 . Při prodeji pak podnik získá 2 Kč za 1 kg V_1 , 4 Kč za 1 kg V_2 a 3 Kč za 1 kg V_3 . Formulujte optimalizační problém.

Formulace 2. (Dopravní problém) Mějme 1 typ neomezeně dělitelného produktu, který chceme přepravit od m výrobců k n odběratelům. Známe požadavky odběratelů (j -tý chce b_j) a kapacity výrobců (a_i je kapacita i -tého výrobce). Chceme splnit požadavky odběratelů a přitom minimalizovat náklady na přepravu (na přepravu 1 kusu zboží od i -tého výrobce k j -tému odběrateli jsou c_{ij}). Formulujte úlohu jako optimalizační problém.

Formulace 3. (Dopravní problém II.) Z daného města je zboží přepravováno po třech různých trasách. První z nich má délku 100 km, druhá 150 km a třetí 180 km. V průběhu roku má být po první trase přepraveno alespoň 780 tun, po druhé trase 425 tun a po třetí trase 1000 tun zboží. K přepravě lze využít tři nákladní auta o nosnostech 1,5 tuny, 3,5 tuny a 5 tun. Nákladní auta o nosnostech 1,5 tuny a 3,5 tuny mohou naložená během roku najet maximálně 25000 km. Nákladní auto o nosnosti 5 tun smí s nákladem během roku absolvovat nejvýše 20000 km. V tabulce jsou uvedeny náklady na jeden km daným naloženým nákladním autem po dané trase:

	vůz 1	vůz 2	vůz 3
trasa 1	4	7	9
trasa 2	11	9	6
trasa 3	2	7	4

Za každé projetí danou trasou je zároveň vybíráno mýtné ve fixní výši: tento poplatek činí 200 za projetí první trasou, 250 za projetí druhou trasou a 380 za projetí třetí trasou. Zpáteční jízda aut zahrnuje pouze mýtné, ostatní náklady jsou zanedbatelné. Auta musí skončit v místě, kde začínala. S jakými minimálními náklady lze naplánovat přepravu zboží po daných trasách? Formulujte jako úlohu lineárního programování s využitím matematické symboliky. Úlohu pouze sestavte, nemusíte ji řešit.

Formulace 4. (Přiřazovací problém.) V podniku pracují 3 skupiny S_1, S_2, S_3 . Každá skupina může za týden zhotovit jednu ze 3 zakázek Z_1, Z_2, Z_3 . Kvalita a také cena zakázky závisí na tom, která skupina ji zhotoví. Předpokládané zisky v tisících Kč udává tabulka. Cílem úlohy je přiřadit zakázky pracovním skupinám tak, aby výsledný celkový zisk byl maximální.

	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	4	3	2
S_2	6	4	3
S_3	4	4	4

Formulace 5. (Řezný problém.) Truhlářská firma má k dispozici laťky o délce 200 cm. Při výrobě plotu potřebuje firma přesně 120 laťek o délce 80 cm, 310 laťek o délce 50 cm a 150 laťek o délce 30 cm. Maximální povolený odřezek má délku 10 cm. Cílem je sestavit takový plán, aby byl odpad minimální.

Formulace 6. (L_1 -regrese.) Přeformulujte úlohu minimalizace součtu absolutních hodnot odchylek

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |y_i - a - bx_i|.$$