Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	20	20	30	30	100
Získáno					

[20] 1. S použitím Taylorova rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1+\sin x}{x}.$$

Řešení:

Použijeme vztahy pro Taylorův rozvoj příslušných funkcí. Jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[1+x+o(x)]-1+[x+o(x)]}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+o(x)}{x} = 2.$$

[20] 2. S použitím Taylorova vzroce spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}\ln x - \sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}{(x-1)^2}.$$

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že limitu lze také zapsat jako

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\ln(1+y) - \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{y^2},$$

což bude výhodné protože Taylorovy rozvoje elementárních funkcí známe zpaměti právě na okolí nuly. Použijeme vztahy pro Taylorův rozvoj příslušných funkcí. Jest

$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}\left[y-\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)\right]-\left[\frac{\pi}{2}y+o\left(y^2\right)\right]}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{\pi}{2}\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)}{y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

[30] 3. Připomeňte si vzorec pro derivaci funkce $\operatorname{arcsinh} x$, tedy vozrec $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, a najděte Talorův rozvoj funkce $\operatorname{arcsinh} x$ v bodě $x_0 = 0$ do třetího řádu včetně. Aneb určete koeficienty a_0, a_1, a_2 a a_3 tak, aby pro $x \to 0$ platilo

$$\operatorname{arcsinh} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$

Řešení:

Vzorec pro Taylorův rozvoj je

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + o\left(x^3\right).$$

V našem případě je $f(x) = \operatorname{arcsinh} x$ a $x_0 = 0$. Zjevně platí, že

$$\begin{aligned}
\left.\operatorname{arcsinh} x\right|_{x=0} &= 0,\\
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsinh} x\right|_{x=0} &= \left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0} = 1,\\
\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\operatorname{arcsinh} x\right|_{x=0} &= -\left.\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = 0,\\
\left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\operatorname{arcsinh} x\right|_{x=0} &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\left.\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\right|_{x=0} = -1,
\end{aligned}$$

z čehož plyne, že pro $x \to 0$ platí

$$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right).$$

[30] 4. S použitím Taylorova rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - \mathrm{e}^{-\sin x} - 2x}{x^5}.$$

Řešení:

Použijeme vztahy pro Taylorův rozvoj příslušných funkcí. Jest

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right),$$

a proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^3 + \frac{1}{4!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^4 + \frac{1}{5!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]^5 + o\left(x^5\right) \\
&= 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3!}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!}\right]^3 + \frac{1}{4!}\left[x\right]^4 + \frac{1}{5!}\left[x\right]^5 + o\left(x^5\right) \\
&= 1 + \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right] + \frac{1}{2}\left[x^2 - 2\frac{x^4}{3!}\right] + \frac{1}{3!}\left[x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right] + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

(Můžeme se povšimnout, že vzhledem k vztahu $\mathrm{e}^{-\sin x} = \mathrm{e}^{\sin(-x)}$ fakticky není nutné určit koeficiteny u sudých mocnin x v Taylorově rozvoji, ty se při výpočtu Taylorova rozvoje $\mathrm{e}^{\sin x} - \mathrm{e}^{-\sin x}$ navzájem odečtou.) Nyní jsme připraveni spočíst limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - \mathrm{e}^{-\sin x} - 2x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[2x - \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)\right] - 2x}{x^5} = -\frac{2}{15}.$$