Matematická analýza pro fyziky II
LS 2019/20, MFF UK

Sada příkladů 5

ČÍSELNÉ ŘADY

Číselné řady s nezápornými členy. .

1. Nalezněte n-tý částečný součet a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$.

Řešení: $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \ +\infty$.

2. Spočtěte

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a+nd)q^n, \quad a,d \in \mathbb{R}, \quad |q|<1$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Zde pro $x \in \mathbb{R}$ je $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ určeno tím, aby platilo: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Řešení: **a)** $\frac{1}{5}$, **b)** $\frac{aq}{1-q}+\frac{dq}{(1-q)^2}$, **c)** $\frac{11}{18}$, **d)** 1.

3. Na základě elementárních úvah rozhodněte zda řady konvergují či divergují

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$.

Návod: Porovnejte s řadou **a)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$, **b)** a **c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

4. Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}$

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$

m) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln \ln n)^q}, \quad p,q \in \mathbb{R}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}, \quad p,q \in \mathbb{R}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^p, \quad p \in \mathbb{R}$.

Řešení: **a)** K, **b)** K, **c)** D, **d)** D, **e)** K pro $\alpha > 2$ a D jinak, **f)** K pro $\alpha < -1$ a D jinak, **g)** K, **h)** K, **i)** K, **j)** K, **k)** K, **l)** K pro $p > 1$ a jinak D, **m)** K pro $p = 1, q > 1$ nebo $p > 1$, jinak D, **n)** K, **o)** K pro $q > 0$ nebo pro $q = 0$ a $p \leq 0$, jinak D, **p)** K pro $p > 2$ a D jinak.

K ... konverguje, D ... diverguje