Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

[10] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1 \left([-1,1]\right) \mid y(-1) = 0,\, y(1) = 1 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} x^2 \ln \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

Spočtěte

a) První Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

a) Druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h a g. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,g)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,g]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

Řešení:

Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ v bodě y ve směru h spočteme dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0} .$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_{-1}^{1} x^2 \ln \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + t \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) = \int_{-1}^{1} 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + t \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + t \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ získáme

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = \int_{-1}^{1} 2x^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x,$$

což je hledaný vztah pro první Gâteaux derivaci.

Dále spočteme druhou derivaci. Opět vycházíme z definice

$$D^2\Phi(y)[h,g] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(D\Phi(y + sg)[h] \right) \right|_{s=0} .$$

Dosazením za $y =_{\text{def}} y + sg$ do $D\Phi(y)[h]$ dostaneme

$$D\Phi(y+sg)[h] = \int_{-1}^{1} \left\{ 2x^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right\} \mathrm{d}x.$$

Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} D\Phi(y+sg)[h] \\
&\quad= \int_{-1}^{1} \Bigg\{ -4x^2 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\
&\qquad\qquad + 2x^2 \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + s\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \Bigg\} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Po dosazení $s = 0$ a drobném přeuspořádání členů získáme hledanou druhou derivaci

$$D^2\Phi(y)[h,g] = \int_{-1}^{1} 2x^2 \left\{ -\frac{2}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^2} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \right\} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x.$$

Povšimněte si, že výraz je bilineární vzhledem k funkcím g a h. Navíc, pokud provedeme přeznačení $h =_{\text{def}} g$ a $g =_{\text{def}} h$, dostaneme tentýž vztah. Obě posledně jmenovaná pozorování jsou pro námi zkoumanou třídu funkcionálů obecně platná. Takto si můžete rychle zkontrolovat, jestli váš výpočet vede k něčemu rozumnému.

[10] 2. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) \mid y(-\frac{1}{2}) = 0,\, y(0) = 0 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y^2 + (y')^2 - 2yx \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremály funkcionálu Φ na množině M.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Rozhodněte, zda jsou nalezené extermály minimizéry či maximizéry daného funkcionálu.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \Big((y+th)^2 + ((y+th)')^2 - 2(y+th)x \Big)\,\mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(2(y+th)h + 2(y+th)'h' - 2hx\right)\mathrm{d}x$$

po dosazení $t=0$ (a integraci per partes) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0} = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y - y'' - x\right) h \mathrm{d}x.$$

Odkud lze přečíst Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\Phi(y)$

$$y - y'' - x = 0.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice vyřešíme metodou variace konstant. (Pokud tedy partikulární řešení nevidíme rovnou nebo pokud nehledáme řešení metodou násady pro speciální pravou stranu.) Řešení homogenní rovnice

$$y'' - y = 0$$

je zřejmě $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$. Hledejme nyní partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y'' - y = -x$$

metoda variace konstant dává pro funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ následujcí systém rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix},$$

odkud

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x\mathrm{e}^{-x} \\ -x\mathrm{e}^x \end{bmatrix}.$$

Zbývá vyřešit diferenciální rovnice pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$, což snadno provedeme pouhou integrací

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ c_2 &= \frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

odkud

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{-x},\\
c_2 &= \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{x},
\end{aligned}
$$

Dosadíme za funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ do vzorce pro partikulární řešení a vidíme, že partikulární řešení jest

$$
y(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} = x,
$$

což jsme ovšem mohli snadno uhádnout pouhým pohledem na zkoumanou rovnici.

Celkové řešení nehomogenní rovnice je

$$
y(x) = x + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x},
$$

konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek

$$
\begin{aligned}
y\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0,\\
y(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

což vede na soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}C_2 &= \frac{1}{2},\\
C_1 + C_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

jejímž řešením je

$$
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{e} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2\,(\mathrm{e}-1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Extremála je tudíž

$$
y(x) = x - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2\,(\mathrm{e}-1)}\mathrm{e}^{x} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{2\,(\mathrm{e}-1)}\mathrm{e}^{-x}
$$

aneb

$$
y(x) = x - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}-1}\sinh x
$$

Druhou derivaci funkcionálu φ spočteme podle předpisu

$$
\begin{aligned}
D^2\Phi(y)[h,h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\bigg|_{t=0}\\
&= 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left((y+th)h + (y+th)'h' + h\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(h^2 + (h')^2\right)\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}
$$

což je kupodivu totéž co plyne z obecné věty:

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

pak je jeho druhý diferenciál roven

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\,(h')^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$

kde

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'},$$
$$Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),$$

Můžeme si povšimnout, že druhá Gâteaux derivace je nezáporná, z čehož je zřejmé, že extremála *není* maximizér daného funkcionálu.

Ke zjištění povahy extremály použijeme některé z následujících kritérií

Je-li y klasické řešení Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

a je-li pro každé x z intervalu $[a, b]$ funkce $f(y, z) = F(x, y, z)$ konvexní, pak je y minimizér daného funkcionálu.

nebo

Řekneme, že bod $\tilde{a}$ je konjugovaný k bodu a, pokud má rovnice (za y se dosazuje bod podezřelý z extrému)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ph') + Qh = 0$$

netriviální řešení s okrajovými podmínkami $h(a) = 0$, $h(\tilde{a}) = 0$.

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

a nechť y splňuje následující podmínky:

- Funkce y je extremálou funkcionálu Φ, to jest řeší příslušnou Eulerovu–Lagrangeovu rovnici.
- Koeficient P je (v bodě extremály) kladný (resp. záporný). Přesněji $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (resp. $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} < 0$).

- Interval $(a, b]$ neobsahuje žádné body konjugované k bodu a.

Pak je y (slabým) minimem (resp. maximem) funkcionálu Φ.

První z kritérií je splněno, funkce $f(y, z)$ je definována jako

$$f(y, z) = y^2 + z^2 - 2yx,$$

kde x je libovolný bod z intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Spočteme druhý diferenciál funkce f a vidíme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$D^2 f[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \geq 0,$$

a funkce f je tedy konvexní jak je v příslušném kritériu požadováno.

Druhé z kritérií je také zjevně splněno, neboť v našem případě je $P = 1$, $Q = 1$ a příslušná rovnice pro existenci konjugovaného bodu je tedy $(a = -\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} -h'' + h &= 0, \\ h(a) &= 0, \\ h(\tilde{a}) &= 0, \end{aligned}$$

ale tato rovnice má pouze triviální řešení (řešením rovnice je $h(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x}$, z okrajových podmínek pak plyne, že obě integrační konstanty jsou nulové), v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ proto neexistují konjugované body. Kromě toho jsou zřejmě splněny i ostatní podmínky.

[10] 3. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{-nx}\right) + x\mathrm{e}^{-nx}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $[0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a na intervalu K, kde

a) $J = (0, +\infty)$,

b) $K = [\alpha, +\infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Řešení:

Volme x libovolně, ale pevně z $(0, \infty)$, pak zjevně platí, že

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(1 - \mathrm{e}^{-nx}\right) + x\mathrm{e}^{-nx}\right) = 1.$$

Pro $x = 0$ pak platí

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0.$$

Bodová limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je tedy funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Můžeme si povšimnout, že na intervalu $[0, +\infty)$ je bodová limita nespojitá funkce. Funkce f_n jsou ovšem na témže intervalu spojité, proto není možné aby na tomto intervalu stejnoměrně konvergovaly k funkci f. Okamžitě proto můžeme říci, že zkoumaná posloupnost *nekonverguje stejnoměrně na intervalu* J.

Sledujme však standardní postup. Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme s použitím ekvivalentní charakterizace. Platí věta

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \,.$$

Najděme tedy supremum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na příslušných intervalech. Zkoumejme nejprve interval K. Na intervalu K jsou $f_n(x)$ i $f(x)$ spojité funkce, proto bude funkce $f_n(x) - f(x)$ na intervalu K nabývat maxima. Platí

$$f_n(x) - f(x) = -\mathrm{e}^{-nx} + x\mathrm{e}^{-nx} = (x-1)\,\mathrm{e}^{-nx}.$$

Absolutní hodnotu tedy odstraníme takto

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} (x-1)\,\mathrm{e}^{-nx}, & x \geq 1, \\ -(x-1)\,\mathrm{e}^{-nx}, & x < 1. \end{cases}$$

Hledejme nyní maximum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq 1\}$. První derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} |f_n(x) - f(x)| = \mathrm{e}^{-nx}\,(n + 1 - nx)$$

Derivace je tedy rovná nule v bodě $x_{\mathrm{ext}} = 1 + \frac{1}{n}$. Je zjevné, že nalezený bod je bodem, ve kterém zkoumaná funkce nabývá uvedeném intervalu maxima. Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K \cap \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq 1\}} |f_n(x) - f(x)| &= \left.(f_n(x) - f(x))\right|_{x = x_{\mathrm{ext}}} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1. \end{aligned}$$

Hledejme nyní maximum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} |\, x < 1\}$. První derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} |f_n(x) - f(x)| = -\mathrm{e}^{-nx}\,(n + 1 - nx)\,,$$

Derivace je tedy rovná nule v bodě $x_{\mathrm{ext}} = 1 + \frac{1}{n}$. Tento bod však neleží uvnitř intervalu $K \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x < 1\}$. Na tomto intervalu tedy funkce nabývá maxima v některém z krajních bodů. Jelikož je funkce na zmíněném intervalu zjevně klesající, maximum se nabývá v levém krajním bodě, tedy

$$\sup_{x \in K \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x<1\}} |f_n(x) - f(x)| = \left.(f_n(x) - f(x))\right|_{x=\alpha} = (1-\alpha)\,\mathrm{e}^{-n\alpha}.$$

Celkem tedy pro interval K dostaneme

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \max \left\{ \left(1 - \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)s} - 1,\ (1-\alpha)\,\mathrm{e}^{-n\alpha} \right\},$$

kde α je pevné číslo. Jest

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 - \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-nx} - 1 \right] = 0,$$
$$\lim_{n \to +\infty} \left[(1-\alpha)\,\mathrm{e}^{-n\alpha} \right] = 0,$$

a následně tedy

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

což znamená, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k f na intervalu K.

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu J. Využijeme výše uvedených výpočtů. Opět platí

$$\begin{aligned}\sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 1\}} |f_n(x) - f(x)| &= \left.(f_n(x) - f(x))\right|_{x=x_{\mathrm{ext}}} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1.\end{aligned}$$

Na intervalu $J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x < 1\}$ ovšem musíme postupovat opatrně. Víme, že

$$\sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x<1\}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x<1\}} (1-x)\,\mathrm{e}^{-nx}.$$

Narozdíl od předchozího případu se nyní můžeme s bodem x libovolně přiblížit nule. Hodnota suprema musí být větší než hodnota v jakémkoliv bodě daného intervalu, tedy například v bodě $x = \frac{1}{n}$, aneb

$$\sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x<1\}} (1-x)\,\mathrm{e}^{-nx} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-1}.$$

Pak ovšem

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x \in J \cap \{x \in \mathbb{R} | \, x<1\}} (1-x)\,\mathrm{e}^{-nx} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-1},$$

a proto

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0,$$

což znamená, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *nekonverguje stejnoměrně* k f na intervalu J.

Několik členů posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je načrtnuto na Obrázku 1.

[10] 4. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

stejnoměrně konvergentní na množině

a) $J = [1, +\infty)$,

b) $K = [\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > 1$.

Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejnoměrně konvergentní.

Řešení:

Využijeme Weierstrass kritérium, které říká:

> Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti funkcí, přičemž $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných funkcí. Nechť platí:
>
> - Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.
> - Pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$.
>
> Potom řada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

Na intervalu J a tedy i intervalu K zjevně platí, že

$$\frac{\ln(1+2nx)}{nx^n} = \frac{\ln(1+2nx)}{2nx} \frac{2}{x^{n-1}} \leq \frac{2}{x^{n-1}}.$$

Zkoumejme nyní řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{x^{n-1}}.$$

Tato řada je geometrická řada, kdykoliv je $x \in (1, +\infty)$, tak platí

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{2}{x^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{x^{n-1}} = 2\sum_{n=0}^{M+1} \frac{1}{x^n} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{M+1}}{1-\frac{1}{x}} \overset{M\to+\infty}{\to} 2\frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Navíc, je-li $x \in K$, pak je řada $\sum_{n=1}^{M} \frac{2}{x^{n-1}}$ stejnoměrně konvergentní. Z Weierstrassova kritéria proto plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

je na intervalu K stejnoměrně konvergentní.

Prozkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu J. Nejprve zjistíme, jestli řada splňuje nutnou podmínku na stejnoměrnou konvergenci, která říká:

> Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, pak $f_n \overset{M}{\rightrightarrows} 0$.

Zkoumejme tedy stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n = \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

na intervalu J. Bodová limita je na zkoumaném intervalu nula, navíc je posloupnost na tomoto intervalu posloupností nezáporných funkci. Ekvivalentní kritérium pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí zní

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Konkrétně tedy chceme spočíst

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}.$$

Použijeme odhad

$$\frac{\ln(1+2nx)}{nx^n} = \frac{\ln(1+2nx)}{\sqrt{2nx}} \frac{\sqrt{2nx}}{nx^n} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}x^{n-\frac{1}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Vzorové řešení umístěné na internetové stránky ve čtvrtek 16. listopadu bylo v tomto bodě chybné, omlouváme se. Platí proto

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tudíž konverguje stejnoměrně na intervalu $J = [1, +\infty)$. Je proto splněna nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

na intervalu J.

Prozkoumejme platnost Bolzano–Cauchy podmínky, která říká:

> Řada $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně na M právě když
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in M : n \geq n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Pro $x \in (1, +\infty)$ platí

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\ln(1+2kx)}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\ln(1+2(n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}} = p\frac{\ln(1+2(n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}}.$$

Volme nyní $p = n$ a $x = 1 + \frac{1}{2n}$, pak

$$\begin{aligned} n\frac{\ln(1+2(n+1)x)}{2nx^{2n}} &= \frac{\ln\left(1+2(n+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\ln\left(4+2n+\frac{1}{n}\right)}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \geq \frac{\ln\left(4+2n+\frac{1}{n}\right)}{2\mathrm{e}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

z čehož plyne, že lze zvolit ε tak, že pro libovolné n_0 jsme schopní najít n, p a x tak, aby

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \geq \varepsilon.$$

Bolzano–Cauchy podmínka tedy není splněna a řada tedy není na intervalu J stejnoměrně konvergentní.

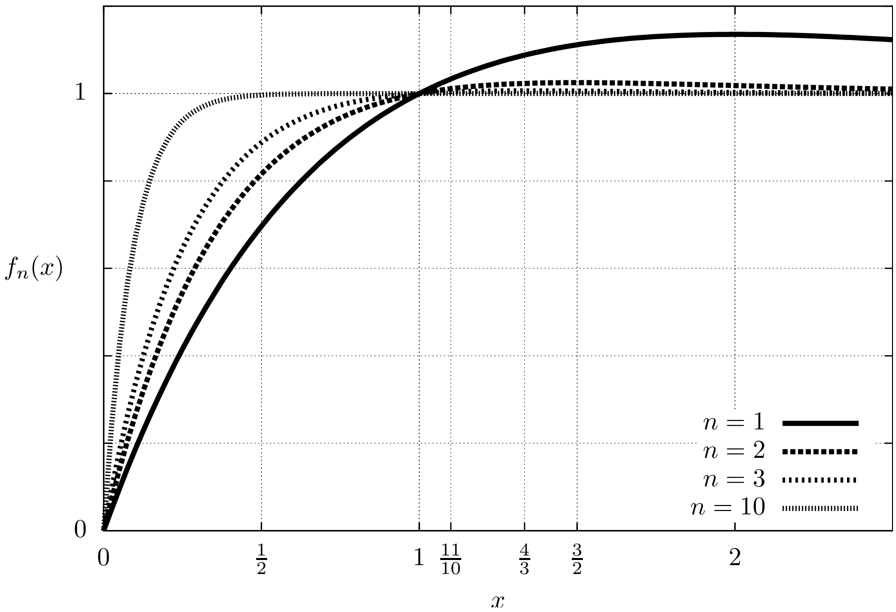
Případně můžeme jednodušeji postupovat i takto. (Povšimněte si, že předchozí postup lze na rozdíl od náledujícího postupu uplatnit i v případě, že zkoumáme pouze interval $(1, +\infty)$ a nikoliv interval $[1, +\infty)$.) Zkoumejme rovnou řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}$$

a dosaďme za $x = 1$. Pak je

$$\left.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2nx)}{nx^n}\right|_{x=1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+2n)}{n},$$

což je ovšem divergentní číselná řada. Zkoumaná řada tedy nekonverguje stejnoměrně na intervalu J.



Obrázek 1: Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$.