1. Ukažte, že platí

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x=0}^{15}\frac{1+nx^3}{1+n^3x}\,\mathrm{d}x=0.$$

Návod: Použijte Levi větu s patřičně vybranou posloupností funkcí. Využijte skutečnosti, že spojité funkce na uzavřeném intervalu mají (konečný) Lebesgue integrál, aneb jsou lebesgueovsky integrovatelné.

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x\in M$ zdola k funkci f, aneb pro skoro všechna $x\in M$ a pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$ a $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro skoro všechna $x\in M$ platí $g\leq f_1$ a $\int_M g\,\mathrm{d}x>-\infty$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka: Obdobně lze zformulovat větu pro posloupnost, která konverguje shora. Lebesgueovskou integrovatelností funkce h se v tomto případě rozumí, že je konečný alespoň jeden z Lebesgueových integrálů z h^+ a h^-. Aneb jako lebesgueovsky integrovatelné funkce zde chápeme i funkce, které mají *nekonečný* Lebesgueův integrál.