1. Rozmyslete si jak postupovat při negaci výroků s kvantifikátory $\forall$ a $\exists$. Obecný výrok

$$\forall x \in M : A(x),$$

kde M je konečná množina, řekněme $M = \{x_1, x_2, x_3\}$, je zkratkou za výrok

$$A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3).$$

Naopak, obecný výrok

$$\exists x \in M : B(x),$$

je pro stejnou množinu M zkratkou za výrok

$$B(x_1) \vee B(x_2) \vee B(x_3).$$

Negaci výroku $A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3)$ najdeme standardním způsobem,

$$\neg \left(A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3)\right) = (\neg A(x_1)) \vee (\neg A(x_2)) \vee (\neg A(x_3))$$

a vidíme tedy, že platí

$$\neg \left(\forall x \in M : A(x)\right) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x).$$

Tuto rovnost pak očekáváme i od nekonečných množin.

2. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^4}$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. V případě nouze použijte níže uvedenou nápovědu.

Návod: Ukažte, že platí $\left|\frac{x}{1+n^2x^4}\right| \leq \frac{1}{2n^2}$ a použijte Weierstrass kritérium.

3. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\,(\ln n)^2}\right)$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

a) $J = (-\infty, \infty)$,
b) $K = (-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

V případě nouze použijte níže uvedenou nápovědu.

Návod: Výraz $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n(\ln n)^2}\right)$ rozepište jako $\ln\left(1 + \frac{x^2}{n(\ln n)^2}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n(\ln n)^2}\right)}{\frac{x^2}{n(\ln n)^2}} \frac{x^2}{n(\ln n)^2}$. . Na intervalu K použijte pro řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n(\ln n)^2}$ Wierstrassovo kritérium a ukažte, že řada je na intervalu K stejnoměrně konvergentní. Zbývá se vypořádat se členem $\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n(\ln n)^2}\right)}{\frac{x^2}{n(\ln n)^2}}$. Ponaučením je, že vás nesmí zaskočit úloha o konvergenci číselných řad, musíte být schopní rozhodnout zda je kupříkladu číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ konvergentní. To samé platí o řadách $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta}$, kde $\beta \in \mathbb{R}$.

Na intervalu J je potřeba ukázat, že řada nekonverguje stejnoměrně. To lze provést tak, že dokážete platnost negace Bolzano–Cauchy podmínky.

4. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sqrt[n]{x^2}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

a) $J = (0, \infty)$,
b) $K = (0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

V případě nouze použijte níže uvedenou nápovědu.

Návod: Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je konvergentní číselná řada, zbývá se vypořádat s členem $\sqrt[n]{x^2}$, což je snadné pokud uvažujeme interval K. Na intervalu J je potřeba ukázat, že řada nekonverguje stejnoměrně. To lze provést tak, že dokážete platnost negace Bolzano–Cauchy podmínky. Zde stačí uvažovat $\sum_{k=n}^{n+1} f_k(x)$, tedy dva po sobě jdoucí členy.

5. Zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - x) x^n$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

a) $J = (0, 1)$,

b) $K = (0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha < 1$.

V případě nouze použijte níže uvedenou nápovědu.

Návod: Využijeme vzorce pro součet prvních $N+1$ členů geometrické řady $\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ a najdeme tak explicitní vzorec pro k-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{k} (1-x)x^n$. Úloha se tak redukuje na analýzu stejnoměrné konvergence explicitně známé posloupnosti částečných součtů.