1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^3 \left([-1,1] \right) \mid y(-1) = 0,\, y(1) = 1 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} \left[x^2 \sin(\pi y) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^3 + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + y \mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \right)^2} \right] \mathrm{d}x$$

   Spočtěte první a druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ. [Toto je první příklad ze vzorové zápočtové písemné práce. Vzorové řešení si můžete stáhnout na internetových stránkách předmětu – samozřejmě až poté, co se příklad pokusíte vyřešit sami.]

2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} + \frac{\arctan x}{n^2}.$$

   Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0,1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J, kde

   a) $J = [0,1]$,
   b) $K = [\alpha, 1]$, kde $\alpha \in (0,1)$. [Využijte výpočty z posledního cvičení. Tento příklad je *variantou* třetího příkladu ze vzorové zápočtové písemné práce.]

3. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{2}{\pi} \arctan x}$$

   stejnoměrně konvergentní na množině

   a) $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
   b) $\mathbb{R}$.

   Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejnoměrně konvergentní. [Toto je poslední příklad ze vzorové zápočtové písemné práce. Vzorové řešení si můžete stáhnout na internetových stránkách předmětu – samozřejmě až poté, co se příklad pokusíte vyřešit sami.]

Popis řešení úlohy o brahystochroně najdete leckde na internetu, v češtině například rovnou na české Wikipedii, tedy na stránce https://cs.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona. Řešení popsané na uvedné stránce není zcela koretkní, víte proč?