1. Buď Φ funkcionál daný předpisem
$$\Phi[y] = \int_a^b L(y, y')\,\mathrm{d}x.$$
Předpokládejme, že funkce y_{ex} je řešením příslušné Euler–Lagrange rovnice. Ukažte, že funkce $M(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}})$ definovaná jako
$$M(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}}) =_{\mathrm{def}} L(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}}) - y'_{\mathrm{ex}} \frac{\partial L(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}})}{\partial y'_{\mathrm{ex}}}$$
je konstantní na intervalu (a, b). (Symbolem $\frac{\partial L(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}})}{\partial y'_{\mathrm{ex}}}$ se rozumí $\left.\frac{\partial L(y_{\mathrm{ex}}, z)}{\partial z}\right|_{z=y'_{\mathrm{ex}}}$, tedy totéž co při diskusi Euler–Lagrange rovnic.) Fakt, že funkce $M(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}})$ je konstantní bývá opisován slovy „funkce $M(y_{\mathrm{ex}}, y'_{\mathrm{ex}})$ je první integrál příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice“.

2. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{y \in \mathcal{C}^1\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) \mid y(-\frac{1}{2}) = 0, y(0) = 0\right\}$ předpisem
$$\Phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y^2 + (y')^2 - 2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x.$$
Najděte extremály funkcionálu Φ na množině M. (Podrobně dokončete výpočet načrtnutý na cvičení.) Projděte si poznámky z přednášky a rozhodněte, zda je nalezená extermála minimizér či maximizér daného funkcionálu.

Popis řešení úlohy o brahystochroně najdete leckde na internetu, v češtině například rovnou na české Wikipedii, tedy na stránce https://cs.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona. Řešení popsané na uvedné stránce není zcela koretkní, víte proč?