Připomeňte si větu o implicitních funkcích. Ve značení použitém na cvičení věta říká toto.

Definition 1 (Implicitně zadaná funkce). *Buď $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ funkce z $\mathbb{R}^{n+m}$ do $\mathbb{R}^m$, a buď $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu rovnic*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0},$$

aneb ve složkách

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy pro $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme takovou funkci $\boldsymbol{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

aneb ve složkách

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

která po dosazení řeší soustavu $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, aneb platí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$. Funkce $\boldsymbol{f}$ se nazývá funkce implicitně zadaná soustavou $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$. *(Pro funkci $\boldsymbol{f}$ často nezavádíme nový symbol, vztah $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ prostě píšeme jako $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.)*

Theorem 2 (Věta o implicitních funkcích). *Uvažujme funkce zadané implicitně ve smyslu předchozí definice. Předpokládejme, že:*

1. *Bod $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0] = [x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0]$ je bod, který řeší rovnici $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, to jest platí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}$.*
2. *Funkce $\boldsymbol{F}$ má v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$ spojité první parciální derivace podle všech proměnných. (Tímto se míní, že každá složka $\boldsymbol{F}$, tedy funkce F_i, $i = 1, \cdots, m$ má v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$ spojité parciální derivace podle všech proměnných.)*
3. *Determinant*

$$\det \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial y_m} \end{bmatrix},$$

je v bodě $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$ různý od nuly.

Pak existuje okolí Ω bodu $\boldsymbol{x}^0$ takové, že na tomto okolí jsou jednoznačně dány spojité funkce $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, které řeší soustavu $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, a pro které platí $\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$. Navíc platí, že funkce $\boldsymbol{f}$ má spojité první parciální derivace podle všech proměnných $x_1, \cdots, x_n$. (Tímto se míní, že každá složka $\boldsymbol{f}$, tedy funkce f_i, $i = 1, \cdots, m$ má v okolí bodu $\boldsymbol{x}^0$ spojité parciální derivace podle všech proměnných.)

Remark 3 (Výpočet parciálních derivací implicitních funkcí). *Z praktického hlediska je důležitý postup jak získat hodnoty parciálních derivací implicitně zadané funkce. To lze provést následujícím způsobem. Předpokládejme, že implicitně zadaná funkce je dobře definována ve smyslu předchozí věty. Použijeme-li standardní, byť lehce matoucí, značení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ namísto $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, můžeme psát*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}.$$

Cílem je získat vzorce pro $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$, aneb ve složkách

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Zabývejme se kupříkladu prvním sloupcem, to jest hledejme derivace implicitně zadané funkce podle proměnné x_1. Derivováním $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ podle x_1 — používáme větu o derivování složené funkce — získáme

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} + \left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \cdots + \left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= 0,\\
\left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} + \left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \cdots + \left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= 0,\\
&\vdots\\
\left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} + \left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \cdots + \left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= 0.
\end{aligned}
$$

(Značení $\left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}$ říká: "Derivuj funkci F_1 jakožto funkci $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$ podle proměnné x_1. Jakmile skončíš, dosaď za $y_1, y_2, \cdots, y_m$ hodnoty získané z rovnic $y_1 = y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), y_2 = y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m = y_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.)
Toto je soustava lineárních rovnic *pro vektor neznámých*

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\vdots\\
\frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}
\end{bmatrix},
$$

kterou můžeme přepsat do tvaru

$$
\begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \cdots & \left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}\\
\left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \cdots & \left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} & \cdots & \left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\vdots\\
\frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}\\
\left.\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}\\
\vdots\\
\left.\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}
\end{bmatrix}.
$$

Matice, která se objevuje v této úloze, tedy matice

$$
\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \left.\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\\
\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_m}
\end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}
$$

je tatáž matice jako ve větě o implicitních funkcí. (Jen jsme použili značení, které zabírá méně místa.) Ve věte o implicitních funkcích požadujeme, aby byl determinant této matice různý od nuly. Matice je tedy invertibilní a můžeme psát

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\frac{\partial y_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\
\vdots\\
\frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}
\end{bmatrix}
= -\mathbb{A}^{-1}
\left.\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\\
\frac{\partial F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\\
\vdots\\
\frac{\partial F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}
\end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}.
$$

Obdobně bychom postupovali i v případě derivací podle dalších proměnných.

1. Projděte si znovu příklad diskutovaný na cvičení. Ve značení odpovídajícím větě o implicitních funkcích jsme řešili následující úlohu. Buď y_1 a y_2 funkce proměnné x_1, které jsou zadané implicitně vztahy

$$
\begin{aligned}
x_1 - y_1 - \frac{1}{y_1} &= 0,\\
y_2 - y_1^2 - \frac{1}{y_1^2} &= 0.
\end{aligned}
$$

   Spočtěte $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_1}$. Přesně sledujte postup popsaný výše.

2. Buďte funkce y_1 a y_2, jakožto funkce proměnné x_1 a x_2, zadány implicitně soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} &= 0,\\
x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) &= 0.
\end{aligned}
$$

   Vypočtěte $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ v bodě $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$.

3. Uvažujte funkcionál

$$\phi(f) =_{\mathrm{def}} \int_0^1 x \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že funkcionál na množině funkcí f se spojitou derivací a s okrajovými podmínkami $f(0) = 1$ a $f(1) = 0$ *nenabývá* minima.

1. Rozmyslete si, že funkcionál je vždy nezáporný.
2. Ukažte, že pokud je $\phi(f) = 0$, pak funkce f musí být konstantní a nemůže tedy splňovat okrajové podmínky.
3. Uvažujte funkci

$$g_N =_{\mathrm{def}} \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{N}\right], \\ -\frac{\ln x}{\ln N}, & x \in \left(\frac{1}{N}, 1\right], \end{cases}$$

kde $N \in \mathbb{N}$ je parametr. Ukažte, že platí $\phi(g_N) = \frac{1}{\ln N}$, a tedy $\phi(g_N) \to 0+$ pro $N \to +\infty$.

4. Rozmyslete si, že z výše uvedeného plyne, že funkcionál skutečně nenabývá na uvedené množině minima $\min_f \phi(f)$, ale že existuje pouze $\inf_f \phi(f)$ a platí $\inf_f \phi(f) = 0$.

(Fakt, že funkce g_N nemá klasickou derivaci v bodě $\frac{1}{N}$ a přísně vzato tedy nepatří do množiny funkcí se spojitou derivací, zatím ignorujte.)