

1. Na oblasti $\Omega = (0, 1)$ a pro $a > 0$ uvažujte rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au,$$

pro funkci $u(x, t)$ s okrajovými podmínkami

$$u(x, t)|_{x=0,1} = 0.$$

Ukažte, že funkce $u(x, t) = 0$ je řešením dané rovnice s příslušnou počáteční podmínkou. Ukažte, že toto řešení je *nelineárně* stabilní pokud

$$a < \pi^2.$$

Můžete postupovat kupříkladu takto. Uvažujte funkcionál

$$V =_{\text{def}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

a ukažte, že příslušný funkcionál je Lyapunov funkcionál charakterizující stabilitu zkoumaného řešení. Postupujte jako na přednášce, a explicitně spočtete vlastní čísla příslušné úlohy.