1. V textu, který byl předmětem studia minulý týden, se objevil vztah mezi momentem síly M a deformací, jmnovitě

$$M = \mathrm{E}I\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},$$

kde E značí Young modul pružnosti a I moment setrvačnosti řezu tyčí,

$$I =_{\mathrm{def}} \int_{y=-h}^{h} y^2 \,\mathrm{d}y.$$

Odvoďte tento vztah!

Můžete postupovat kupříkladu takto. (Značení viz přiložený Obrázek 1.) Moment síly $\boldsymbol{M}$ se počítá podle vztahu

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je rameno síly a $\boldsymbol{F}$ je příslušná síla. V případě plošně rozložené síly působící na řez tyče dostaneme

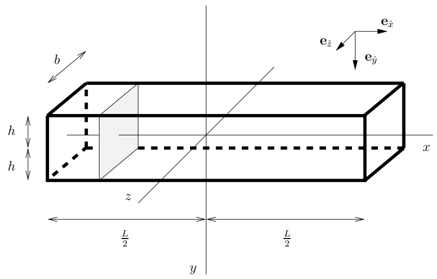
$$\boldsymbol{M} = \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y=-h}^{h} \left(y\boldsymbol{e}_{\hat{y}}\right) \times \left(\mathbb{\tau} \boldsymbol{e}_{\hat{x}}\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

což vede na

$$\boldsymbol{M} = bM\boldsymbol{e}_{\hat{z}},$$

kde

$$M = \int_{y=-h}^{h} y\tau_{\hat{x}\hat{x}} \,\mathrm{d}y.$$



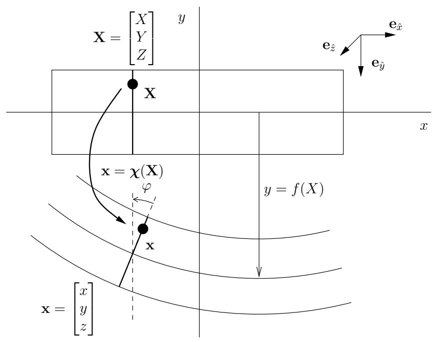
Obrázek 1: Geometrie tyče.

Nyní musíme najít vztah mezi danou deformací a tensorem napětí. Uvažujeme-li isotropní elastický materiál, pak

$$\mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{E}} \left((1+\nu)\, \mathbb{\tau} - \nu \left(\mathrm{Tr}\, \mathbb{\tau}\right) \mathbb{I} \right).$$

Do tohoto vztahu dosadíme pro *speciálně zvolenou deformaci.* Budeme předpokládat, že tyč se deformuje tak, že roviny, které jsou v referenční konfiguraci kolmé na osu tyče, zůstávají i po deformaci kolmé na osu tyče, viz Obrázek 2. Ukažte, že pokud je průhyb osy tyče popsán funkcí $f(X)$, pak je posunutí $\boldsymbol{u}$ dáno vztahem

$$\boldsymbol{u}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -Y \sin\varphi \\ f + Y\cos\varphi - Y \end{bmatrix}.$$



Obrázek 2: Deformace tyče – rovina kolmá na střed tyče zůstává po deformaci rovinou kolmou na střed tyče.

Vyjádřete úhel φ pomocí derivace funkce f a předpokládejte, že se "tyč příliš neprohne". Ukažte, že v tomto případě lze posunutí aproximovat vztahem

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -Y\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} \\ f \end{bmatrix}.$$

Pro takto definované posunutí spočtěte deformační gradient a linearizovaný tensor deformace $\mathbb{\varepsilon}$, z konstitutivního vztahu spočtěte odpovídající napětí, a dostaďte do vztahu

$$M = \int_{y=-h}^{h} y\tau_{\hat{x}\hat{x}} \,\mathrm{d}y.$$

Pokud zanedbáte další "malé" veličiny, dostanete se hledanému vztahu $M = \mathrm{E}I\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, kde funkce $y(x)$ je označena jako $f(X)$.