1. Předpokládejme, že vztah mezi tenzorem napětí $\mathbb{T}$ a tenzorem malých deformací $\mathbb{\varepsilon}$ je

$$\mathbb{\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left((1+\nu)\,\mathbb{T} - \nu\,(\mathrm{Tr}\,\mathbb{T})\,\mathbb{I}\right).$$

(Standardní izotropní lineární elastický materiál.) Na přednášce jsme se zabývali otázkou, jak zformulovat podmínky kompatibility pro malé deformace

$$\mathrm{rot}\left((\mathrm{rot}\,\mathbb{\varepsilon})^{\top}\right) = \mathbb{O}$$

aneb

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\frac{\partial^2 \varepsilon_{lr}}{\partial x_m \partial x_s} = 0$$

s pomocí tenzoru napětí. Ukažte, že pokud je tenzor napětí dán standardním vztahem pro izotropní elastický materiál, a pokud uvažujeme statickou úlohu, pak podmínka $\mathrm{rot}\left((\mathrm{rot}\,\mathbb{\varepsilon})^{\top}\right) = \mathbb{O}$ pro $\mathbb{\varepsilon}$ vede na podmínku

$$\Delta\mathbb{T} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\left(\nabla\left(\mathrm{Tr}\,\mathbb{T}\right)\right) = -\left(\nabla\boldsymbol{f} + (\nabla\boldsymbol{f})^{\top}\right) - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\right)\mathbb{I} \tag{1}$$

pro $\mathbb{T}$. (Symbol $\boldsymbol{f} =_{\mathrm{def}} \rho\boldsymbol{b}$ značí objemovou sílu přenásobenou hustotou, aneb bilance hybnosti má tvar $\mathbf{0} = \mathrm{div}\,\mathbb{T} + \boldsymbol{f}$.) Tato rovnice se jmenuje Beltrami–Michell rovnice.

Můžete postupovat kupříkladu takto. Nejdříve ukažte, že

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{rot}\left((\mathrm{rot}\,\mathbb{\varepsilon})^{\top}\right)\right) = -\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}\,\mathbb{T}\right) + \frac{1-\nu}{\mathrm{E}}\Delta\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{T}$$

což díky podmínce kompatibility $\mathrm{rot}\left((\mathrm{rot}\,\mathbb{\varepsilon})^{\top}\right) = \mathbb{O}$ a bilanci hybnosti $\mathbf{0} = \mathrm{div}\,\mathbb{T} + \boldsymbol{f}$ vede na

$$\frac{1-\nu}{\mathrm{E}}\Delta\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{T} = -\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}.$$

Nyní se vraťte k podmínce kompatibility

$$\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\frac{\partial^2 \varepsilon_{lr}}{\partial x_m \partial x_s} = 0,$$

vzpomeňte si na začátek zimního semestru, a upravte podmínku kompatibility s pomocí vztahu

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det\begin{bmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{bmatrix}.$$

Ve vzorci, který získáte s použitím uvedené identity, využijte vztahy

$$\frac{1-\nu}{\mathrm{E}}\Delta\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{T} = -\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{f},$$
$$\mathbf{0} = \mathrm{div}\,\mathbb{T} + \boldsymbol{f},$$

a po několika algebraických úpravách dostanete hledanou rovnici (1).