1. Ukažte, že složky symetrického gradientu rychlosti $\mathbb{D} =_{\text{def}} \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^\top\right)$ jsou v cylindrických souřadnicích dány vztahem

$$
(\mathbb{D})^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\jmath}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial r} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{v}^{\hat{r}}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix}.
$$

Zároveň ukažte, že složky gradientu rychlosti $\nabla \boldsymbol{v}$ jsou v cylindrických souřadnicích dány vztahem

$$
(\nabla \boldsymbol{v})^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\jmath}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{r}}}{\partial z} \\
r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r}\right) + \frac{\mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{v}^{\hat{r}}}{r} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{\varphi}}}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathrm{v}^{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix}.
$$

V obou případech se složkami míní "fyzikální" složky příslušných tensorů, aneb složky vůči *normované* bázi.

2. [Nepovinný] Ukažte, že složky divergence tensorového pole $\mathbb{A}$ jsou v cylindrických souřadnicích dány vztahem

$$
(\operatorname{div} \mathbb{A})^{\hat{\imath}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} - \mathrm{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{z}}}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \mathrm{A}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} + \mathrm{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{z}}}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{z}}{}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + \mathrm{A}^{\hat{z}}{}_{\hat{r}}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}^{\hat{z}}{}_{\hat{z}}}{\partial z}
\end{bmatrix}
$$

Složkami se opět míní "fyzikální" složky příslušného tensoru, aneb složky vůči *normované* bázi.

3. [Nepovinný] Ukažte, že pokud je rychlostní pole $\boldsymbol{v}$ v cylindrických souřadnicích dáno vztahem

$$
\boldsymbol{v} = r\omega(r)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}},
$$

a pokud je tensorové pole $\mathbb{S}$ v cylindrických souřadnicích dáno vztahem

$$
(\mathbb{S})^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\jmath}} = \begin{bmatrix}
\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}}(r) & \mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}}(r) & 0 \\
\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}}(r) & \mathrm{S}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}}(r) & 0 \\
0 & 0 & \mathrm{S}^{\hat{z}}{}_{\hat{z}}(r)
\end{bmatrix},
$$

přičemž složky tensoru $\mathbb{S}$ jsou pouze funkcemi proměnné r, pak tensorová rovnice

$$
\lambda \overset{\triangledown}{\mathbb{S}} + \mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + 2\mu\tau\overset{\triangledown}{\mathbb{D}}
$$

přejde v cylindrických souřadnicích na

$$
\lambda \begin{bmatrix}
0 & -r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}} & 0 \\
-r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}} & -2r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}} & \mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} & 0 \\
\mathrm{S}^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}} & \mathrm{S}^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{\varphi}} & 0 \\
0 & 0 & \mathrm{S}^{\hat{z}}{}_{\hat{z}}
\end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix}
0 & \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} & 0 \\
\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix} + 2\mu\tau \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & -r^2\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}\right)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Složkami se opět míní "fyzikální" složky příslušných tensorů, aneb složky vůči *normované* bázi.

Na přednášce se vpodstatě snažíme vyřešit úlohu z článku (Oldroyd 1950, Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. 200, 523). Doufám, že vám značení (a postup) použité na přednášce přijde mnohem průhlednější, než značení použité v originálním článku.