1. Ukažte, že naši definici Laplace operátoru pro skalární funkci φ, to jest
$$\Delta\varphi =_{\text{def}} \operatorname{div} \nabla\varphi = \left.\left(\mathrm{g}^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^j}\right)\right|_i,$$
lze upravit do ekvivalentního tvaru
$$\Delta\varphi =_{\text{def}} \frac{1}{\sqrt{\det\mathbb{g}}}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(\sqrt{\det\mathbb{g}}\,\mathrm{g}^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^j}\right),$$
což je vztah, který je často vidění v učebnicích. (Značení je stejné jako na přednášce, $\mathbb{g}$ je metrický tensor.)

   Uvědomte si, že uvedené vzorce mají dvojí význam. Předně, jsme schopni bez většího úsilí aplikovat Laplace operátor na funkci, která je vyjádřená v křivočarých souřadnicích. Dále, jsme schopni "definovat" Laplace operátor kdykoliv máme k dispozici metrický tenzor. To je vhodné pokud chceme zavést Laplace operátor na "křivé ploše" – v takovém případě pak hovoříme o Laplace–Beltrami operátoru.

2. Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ hladké tensorové pole v $\mathbb{R}^3$, a buď $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ libovolné konstantní vektorové pole. Operátor $\operatorname{rot}\mathbb{A}$, který pro všechna $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ splňuje rovnici
$$(\operatorname{rot}\mathbb{A})^\top \boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\left(\mathbb{A}^\top\boldsymbol{v}\right)$$
se nazývá *rotace tensorového pole* $\mathbb{A}$. Ukažte, že v kartézských souřadnicích má právě zavedený operátor vyjádření
$$[\operatorname{rot}\mathbb{A}]_{ij} = \epsilon_{jkl}\frac{\partial \mathrm{A}_{il}}{\partial x_k},$$
a dále ukažte, že pro libovolné vektorové pole $\boldsymbol{u}$ a tensorové pole $\mathbb{A}$ platí
$$\operatorname{rot}(\nabla\boldsymbol{u}) = \mathbb{0},$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbb{A}) = \mathbf{0}.$$

3. Uvažujte jednoduše souvislou oblast Ω v $\mathbb{R}^3$. Ukažte, že pro dané tensorové pole $\mathbb{S}$ existuje vektorový potenciál $\boldsymbol{w}$, to jest $\mathbb{S} = \nabla\boldsymbol{w}$, právě když pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí
$$\operatorname{rot}\mathbb{S} = \mathbb{0}.$$
(Použijte podmínky integrability a ukažte, že je lze zapsat ve výše uvedeném tvaru.)

4. Zabývejte se nyní otázkou, zda lze dané tensorové pole $\mathbb{e} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ zapsat jako symetrický gradient nějakého vektorového pole $\boldsymbol{U}$. (Předpokládejte samozřejmě, že $\mathbb{e}$ je symetrické tensorové pole.) Aneb chcete zjistit, jaká je nutná a postačující podmínka pro tensorové pole $\mathbb{e}$, tak aby na jednoduše souvislé oblasti Ω v $\mathbb{R}^3$ pro nějaké $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^3$ platilo
$$\mathbb{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{U} + (\nabla\boldsymbol{U})^\top\right).$$
Ukažte, že *nutná a postačující podmínka* pro existenci potenciálu $\boldsymbol{U}$ je v tomto případě
$$\operatorname{rot}\left((\operatorname{rot}\mathbb{e})^\top\right) = \mathbb{0}.$$
[Nutná podmínka] Můžete postupovat kupříkladu takto. Přímým derivováním ukažte, že pokud je $\mathbb{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{U} + (\nabla\boldsymbol{U})^\top\right)$, pak
$$\operatorname{rot}\mathbb{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})\right)^\top.$$
Rovnici přepište do tvaru $2(\operatorname{rot}\mathbb{e})^\top = \nabla(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})$ a zformulujte nutnou podmínku pro integrabilitu této rovnice. Tím dokážete nutnou podmínku.

   [Postačující podmínka] Můžete postupovat kupříkladu takto. Stejně jako v nelineárním případě, který jsme studovali na přednášce, použijeme několikrát za sebou obecnou podmínku integrability. Stejně jako v předchozím kroku sestavte rovnici
$$\nabla(\operatorname{rot}\boldsymbol{U}) = 2(\operatorname{rot}\mathbb{e})^\top.$$
Splnění podmínek integrability zajistí, že pro (známou) pravou stranu $2(\operatorname{rot}\mathbb{e})^\top$ existuje potenciál $\boldsymbol{a}$ tak, že
$$\nabla\boldsymbol{a} = 2(\operatorname{rot}\mathbb{e})^\top.$$
Zbývá tedy najít $\boldsymbol{U}$ jako řešení rovnice pro (známou) pravou stranu $\nabla\boldsymbol{a}$
$$\nabla\operatorname{rot}\boldsymbol{U} = \nabla\boldsymbol{a}.$$
Podmínky integrability jsou v tomto případě zjevně splněny, a dokonce můžeme tvrdit, že, například, $\operatorname{rot}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}$. Z této rovnice chcete odvodit rovnici ve tvaru $\nabla\boldsymbol{U} = \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A}$ je nějaký (známý) tensor, a tuto rovnici vyřešit s odkazem na obecné podmínky integrability. Přepíšete-li rovnici
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}$$

v souřadnicích, a vzpomenete-li si na definici axiálního vektoru, snadno nahlédnete, že vhodným kandidátem na *antisymetrickou* část $\nabla \boldsymbol{U}$ je tensorové pole $\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}$. (Matice $\mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}$ je antisymetrická matice přiřazená vektoru $\boldsymbol{a}$, aneb pro každé $\boldsymbol{w}$ platí rovnost $\mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{w}$.) Hledaná rovnice pro $\nabla \boldsymbol{U}$ je tedy

$$\nabla \boldsymbol{U} = \mathbb{e} + \frac{1}{2}\mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}.$$

(Pravá strana je známá funkce, $\mathbb{e}$ je dané tensorové pole a $\mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}$ je získáno řešením rovnice, ve které vystupuje pouze $\mathbb{e}$.) Zbývá ověřit podmínky integrability pro poslední rovnici, aneb ověřit, že $\operatorname{rot}\left(\mathbb{e} + \mathbb{A}_{\boldsymbol{a}}\right) = \mathbb{0}$. Ověření podmínek integrability je ovšem snadné, pokud si předem dokážete rovnost

$$\operatorname{rot} \mathbb{A}_{\boldsymbol{a}} = \left(\operatorname{div} \boldsymbol{a}\right) \mathbb{I} - \left(\nabla \boldsymbol{a}\right)^{\top}.$$